1. Determinare il numero di soluzioni delle seguenti equazioni

$$\text{i) } \ln(1+x) = e^x - 1\ , \qquad \text{ii) } 2^x = x^2 + 1\ ,$$

$$\text{iii) } x^2 = x\sin x + \cos x\ , \qquad \text{iv) } 5^x + 1 = 2 \cdot 3^x\ .$$

Svolgimento:

i) Sia $f(x) = \ln(1+x)$, allora $D_f = (-1,+\infty)$ e

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}\ , \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}\ .$$

Sia $g(x) = e^x - 1$, allora $D_g = \mathbb{R}$ e $g'(x) = g''(x) = e^x$.
Inoltre $f(0) = g(0) = 0$ e in $x=0$ f e g hanno la stessa retta tangente $y = x$.
Quindi dato che f è strettamente concava e g è strettamente convessa nei loro domini si ha che per $x \in (-1,+\infty)\setminus\{0\}$

$$f(x) = \ln(1+x) < x < e^x - 1 = g(x)$$

Così l'unica soluzione è $x = 0$.

$\square$

ii) È facile verificare che $x=0$ e $x=1$ sono soluzioni.
Inoltre se $f(x) = 2^x - x^2 - 1$ allora $f(4) = -1 < 0$
$f(5) = 32 - 26 = 6 > 0$ e siccome f è continua in $[4,5]$, per il teorema degli zeri, c'è un'altra intersezione per qualche $x_0 \in (4,5)$.

Se ci fosse un quarto punto di intersezione allora il fatto che f si annulla in almeno 4 punti distinti implicherebbe, per il teorema di Rolle che, f' si annulla in almeno 3 punti distinti, f'' in almeno 2 punti distinti, f''' in almeno un punto. Ma

$$f'(x) = (2^x)\ln 2 - 2x, \quad f''(x) = (2^x)(\ln 2)^2 - 2, \quad f'''(x) = (2^x)(\ln 2)^3.$$

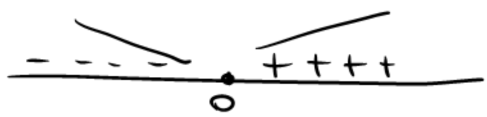
e f''' non si annulla mai. Quindi l'equazione data ha esattamente 3 soluzioni. $\square$

iii) Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2 - x\,\mathrm{sen}\,x - \cos x$$

continua e derivabile in $\mathbb{R}$. Allora

$$f'(x) = x(2-\cos x) \quad :$$



Inoltre $f(0) = -1 < 0$ e $f(\pi) = \pi^2 + 1 > 0$ e per il teorema degli zeri e la stretta crescenza in $(0,+\infty)$, $\exists!\, x_0 \in (0,\pi) : f(x_0) = 0$.

Dato che f è pari si ha anche che $f(-x_0) = 0$.

Infine per la monotonia, per $|x| > \pi$ si ha $f(x) > f(\pi) > 0$ e possiamo concludere che l'equazione data ha esattamente 2 soluzioni. $\square$

iv) È facile verificare che $x=0$ e $x=1$ sono due soluzioni dell'equazione

$$5^x+1=2\cdot 3^x.$$

Per vedere se ce ne sono delle altre consideriamo la funzione

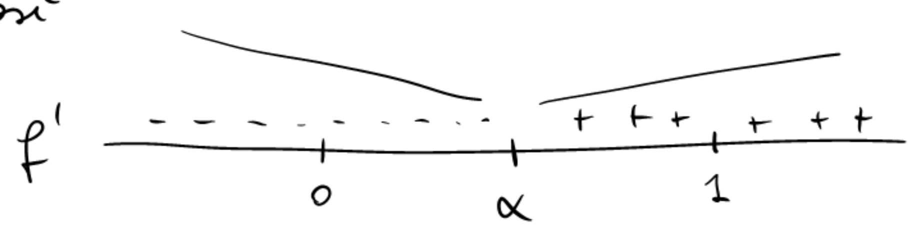
$$f(x)=5^x-2\cdot 3^x+1.$$

Allora $f'(x)=5^x\cdot\ln 5-2\cdot 3^x\cdot\ln 3$ e

$$f'(x)>0 \iff \frac{5^x}{3^x}>\frac{\ln 9}{\ln 5} \iff x>\ln_{\frac{5}{3}}\left(\frac{\ln 9}{\ln 5}\right)=\alpha.$$

Ora $\alpha\in(0,1)$ perché $1<\frac{\ln 9}{\ln 5}<\frac{5}{3}$ $\quad(9^3<5^5)$

così



f strettamente crescente in $[\alpha,+\infty)$ implica che in $[\alpha,+\infty)$ f si annulla solo in 1.

f strettamente decrescente in $(-\infty,\alpha]$ implica che in $(-\infty,\alpha]$ f si annulla solo in 0.

Quindi non ci sono altre soluzioni.

$\square$

2. Calcolare i seguenti limiti

$$\text{i)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\,, \qquad \text{ii)}\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)^{n}\ \text{ con } a,b\geq 0\,,$$

$$\text{iii)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n!)}{\ln(n^n)}\,, \qquad \text{iv)}\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x(\arctan(3x)+\arccos(2/x))}{(\cos(2/x))^{x^2}}\,,$$

$$\text{v)}\ \lim_{x\to 0}(a-5^x)^{1/x}\ \text{ con } a>1\,, \quad \text{vi)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x(\sin(\sin x)-\tan(x))}{\cos(\sin x)-e^{-x^2/2}}\,.$$

Svolgimento:

$$\text{i)}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \overset{SC}{=} \lim_{n\to+\infty}\frac{1/\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\cdot\left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{\sqrt{n}}}{\cancel{\sqrt{n}}}\cdot\frac{\sqrt{1+1/n}+1}{\sqrt{1+1/n}} = 2\,. \quad \square$$

$$\text{ii)}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n!)}{n\ln n} \overset{SC}{=} \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln((n+1)!)-\ln(n!)}{(n+1)\ln(n+1)-n\ln n}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+1)}{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln(n+1)}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\underbrace{\left(\frac{\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)}{\ln(n+1)}\right)}_{\to 0}+1} = 1\,. \quad \square$$

iii) Per simmetria possiamo supporre che $0 \leq a \leq b$.
Se $a=0$ allora

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a+b^{1/n}}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{b}{2^n} = 0$$

Sia ora $0 < a \leq b$ allora

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{1/n}}{2}\right)^n = \left(\frac{\exp\left(\frac{\ln a}{n}\right)+\exp\left(\frac{\ln b}{n}\right)}{2}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{\ln a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)+1+\frac{\ln b}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)^n$$

$$= \left(1+\frac{\ln\sqrt{ab}}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

$$= \exp\left(n\cdot \ln\left(1+\frac{\ln\sqrt{ab}}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

$$= \exp\left(n\cdot\left(\frac{\ln\sqrt{ab}}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

$$= \exp\left(\ln\sqrt{ab}+o(1)\right) \longrightarrow \sqrt{ab}.$$

Quindi in ogni caso il limite è $\sqrt{ab}$. $\square$

iv) Consideriamo prima il denominatore.
Dato che $\frac{1}{x}\to 0$ allora

$$\left(\cos\left(\frac{2}{x}\right)\right)^{x^2} = \exp\left(x^2\cdot \ln\left(\cos\left(\frac{2}{x}\right)\right)\right)$$

$$= \exp\left(x^2 \ln\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right)$$

$$= \exp\left(x^2\left(-\frac{2}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right) \longrightarrow e^{-2}$$

Vediamo il numeratore

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\operatorname{arctg}(3x)+\arccos(2/x)}{1/x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{3}{1+9x^2} - \left(1-\frac{4}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{-1/x^2}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(-\frac{3x^2}{1+9x^2} - 2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{3} - 2 = -\frac{7}{3}.$$

Quindi il limite richiesto vale $-\frac{7}{3}e^2$. $\square$

v) Se $1<a<2$ allora

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to0^+} (a-5^x)^{\frac{1}{x}} = \underbrace{(a-1)}_{\in(0,1)}^{+\infty} = 0 \\ &\lim_{x\to0^-} (a-5^x)^{\frac{1}{x}} = \underbrace{(a-1)}_{\in(0,1)}^{-\infty} = +\infty \end{aligned}\right\} \nexists \lim_{x\to0} (a-5^x)^{\frac{1}{x}}.$$

Se $2<a$ allora

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to0^+} (a-5^x)^{\frac{1}{x}} = \underbrace{(a-1)}_{>1}^{+\infty} = +\infty \\ &\lim_{x\to0^-} (a-5^x)^{\frac{1}{x}} = \underbrace{(a-1)}_{>1}^{-\infty} = 0 \end{aligned}\right\} \nexists \lim_{x\to0} (a-5^x)^{\frac{1}{x}}.$$

Se $a=2$ allora per $x\to0$

$$(2-5^x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(2-5^x)\right)$$

$$= \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(2-(1+x\cdot\ln5+o(x))\right)\right)$$

$$= \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(1-x\ln5+o(x)\right)\right)$$

$$= \exp\left(-\ln5+o(1)\right) \to \frac{1}{5}$$ $\square$

vi) Ricordando che per $x \to 0$,

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

Quindi

$$\cos(\operatorname{sen} x) = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x + o(x)\right)^4$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4).$$

Inoltre da $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ si ottiene che

$$e^{-x^2/2} = 1 + \left(-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4).$$

Quindi il denominatore diventa

$$\cos(\operatorname{sen} x) - e^{-x^2/2} = \frac{5}{24}x^4 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4) = \frac{x^4}{12} + o(x^4).$$

Manteniamo la stessa precisione al numeratore

$$\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \frac{1}{6}\left(x + o(x)\right)^3 + o(x^3)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Inoltre è facile verificare con de l'Hôpital che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{1} + \operatorname{tg}^2 x - \cancel{1}}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

così $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ e il numeratore vale

$$x(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) - \operatorname{tg} x) = x\left(\cancel{x} - \frac{x^3}{3} - \cancel{x} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)$$

$$= -\frac{2x^4}{3} + o(x^4).$$

Infine

$$\frac{x(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) - \operatorname{tg} x)}{\cos(\operatorname{sen} x) - e^{-x^2/2}} = \frac{-\frac{2x^4}{3} + o(x^4)}{\frac{x^4}{12} + o(x^4)} \longrightarrow -\frac{24}{3} = -8.$$

$\square$

3. Dimostrare che valgono le seguenti disuguaglianze.

i) $\quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \sqrt[3]{1+3x} < e^x$,

ii) $\quad \forall x \in (-1,1), \quad 1 - x^2 < \arccos(x)$,

iii) $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| \leq |\sin x| + |x|^3/6$,

iv) $\quad \forall x \in [0, \pi/2], \quad \ln(1+\sin x) \leq \arctan(x)$.

Svolgimento: i) La disuguaglianza è equivalente a

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \quad 1+3x < e^{3x}.$$

Consideriamo la funzione $f(x) = e^{3x} - (1+3x)$.

$$f'(x) = 3(e^{3x} - 1) \qquad - - - - - - \overset{0}{\bullet} + + + + +$$

Quindi $f(0)=0$ e f strettamente crescente in $(0,+\infty)$ implicano che $f(x)>0$ per $x>0$ e $f(0)=0$ e f strettamente decrescente in $(-\infty,0)$ implicano che $f(x)>0$ per $x<0$. $\square$

ii) Sia $f(x) = \arccos x + x^2 - 1$ allora

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 2x$$

e $f'(x) < 0$ se e solo se $2x < \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Se $x \in (-1, 0]$ allora tale disuguaglianza è banalmente vera. Se invece $x \in (0,1)$ allora

$$4x^2 < \frac{1}{1-x^2} \iff 0 < 4x^4 - 4x^2 + 1 = (2x^2-1)^2 \iff x \neq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Quindi f è strettamente decrescente in $(-1,1)$ e

$$\forall x \in (-1,1), \quad f(x) > \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 0. \qquad \square$$

iii) Sia $f(x)=\operatorname{sen}x+\frac{x^3}{6}-x$. Dato che

$$f(|x|)=\operatorname{sen}|x|+\frac{|x|^3}{6}-|x|\le|\operatorname{sen}x|+\frac{|x|^3}{6}-|x|$$

basta mostrare che $\forall x\geq 0$, $f(x)\geq 0$. Ma

$$f'(x)=\cos x+x^2/2-1 \quad \text{e} \quad f''(x)=-\operatorname{sen}x+x.$$

Ora $\forall x\geq 0$, $f''(x)\geq 0$, quindi f' è crescente in $[0,+\infty)$ e siccome $f'(0)=0$ allora $\forall x\geq 0$, $f'(x)\geq 0$. Dunque anche f è crescente in $[0,+\infty)$ e $f(0)=0$ implica che $\forall x\geq 0$, $f(x)\geq 0$. $\square$

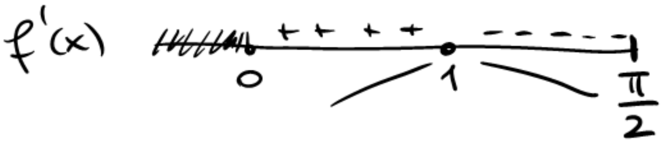
iv) Dato che $\forall x\geq 0$ $\operatorname{sen}x\leq x$ e $\ln(1+x)$ è crescente in $[0,+\infty)$, basta provare $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$,

$$\ln(1+x)\leq \operatorname{arctg}x .$$

Sia $f(x)=\operatorname{arctg}x-\ln(1+x)$, allora per $x\geq 0$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x}\geq 0 \iff \frac{x(1-x)}{(1+x)(1+x^2)}\geq 0$$

da cui



così $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $f(x)\geq \min\left(f(0),f(\frac{\pi}{2})\right)=0$. $\square$

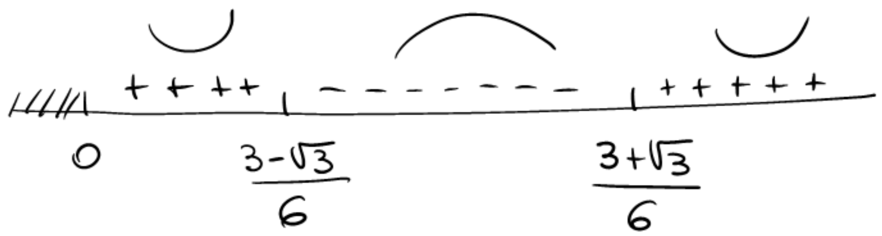
4. Sia f una funzione convessa in $[0, +\infty)$ tale che $f(0) = 0$.
Dimostrare o confutare.

i) La funzione f^2 è convessa in $[0, +\infty)$.

ii) Per ogni $x, y \geq 0$ si ha che $f(x) + f(y) \leq f(x + y)$.

Svolgimento: i) FALSO. Ad esempio $f(x) = x^2 - x$ è una funzione convessa in $[0,+\infty)$ tale che $f(0)=0$, $f^2(x) = (x^2-x)^2$ e $(f^2)''(x) = 2(6x^2-6x+1)$.

$(f^2)''$



e dunque f^2 non è convessa in $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)$. $\square$

ii) VERO. Per la convessità, $\forall x \geq 0$ e $\forall \alpha \in [0,1]$

$$f(\alpha x) = f(\alpha x + (1-\alpha)0) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(0) \leq \alpha f(x). \quad (*)$$

Così per $x, y \geq 0$ e $x+y > 0$,

$$f(x) + f(y) = f\Bigg(\underbrace{\left(\frac{x}{x+y}\right)}_{\in [0,1]} \underbrace{(x+y)}_{>0}\Bigg) + f\Bigg(\underbrace{\left(\frac{y}{x+y}\right)}_{\in [0,1]} \underbrace{(x+y)}_{>0}\Bigg)$$

$$\overset{(*)}{\leq} \left(\frac{x}{x+y}\right) f(x+y) + \left(\frac{y}{x+y}\right) f(x+y) = f(x+y).$$

Se $x, y \geq 0$ e $x+y=0$ allora $x=y=0$ e

$$f(x)+f(y) = f(0)+f(0) = 0 = f(0) = f(x+y). \quad \square$$

5. Sia f una funzione derivabile due volte in $\mathbb{R}$, dimostrare che se

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leq 0 \quad \text{e} \quad f''(x) \geq 0,$$

allora la funzione f è costante.

Svolgimento: Se per assurdo f non fosse costante esisterebbe $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f'(x_0) \neq 0$.

Dato che $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) \geq 0$ allora f è convessa in $\mathbb{R}$ e quindi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad (*).$$

Se $f'(x_0) > 0$ allora passando al limite per $x \to +\infty$ in $(*)$, si otterrebbe che $f(x) \to +\infty$ contro il fatto che $f(x) \leq 0$.

In modo simile, se $f'(x_0) < 0$ allora passando al limite per $x \to -\infty$ in $(*)$ si avrebbe ancora che $f(x) \to +\infty$ contraddicendo l'ipotesi che $f(x) \leq 0$.

$\square$