Tutorato di Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"
5 dicembre 2014

1. Determinare il numero di soluzioni delle seguenti equazioni

i) $\ln(1+x) = e^x - 1$, ii) $2^x = x^2 + 1$,

iii) $x^2 = x\sin x + \cos x$, iv) $5^x + 1 = 2 \cdot 3^x$.

2. Calcolare i seguenti limiti

i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2}\right)^n$ con $a, b \geq 0$,

iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n!)}{\ln(n^n)}$, iv) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x(\arctan(3x) + \arccos(2/x))}{(\cos(2/x))^{x^2}}$,

v) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (a - 5^x)^{1/x}$ con $a > 1$, vi) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(\sin(\sin x) - \tan(x))}{\cos(\sin x) - e^{-x^2/2}}$.

3. Dimostrare che valgono le seguenti disuguaglianze.

i) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \sqrt[3]{1+3x} < e^x$,

ii) $\forall x \in (-1, 1), \quad 1 - x^2 < \arccos(x)$,

iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| \leq |\sin x| + |x|^3/6$,

iv) $\forall x \in [0, \pi/2], \quad \ln(1 + \sin x) \leq \arctan(x)$.

4. Sia f una funzione convessa in $[0, +\infty)$ tale che $f(0) = 0$.
Dimostrare o confutare.

i) La funzione f^2 è convessa in $[0, +\infty)$.

ii) Per ogni $x, y \geq 0$ si ha che $f(x) + f(y) \leq f(x + y)$.

5. Sia f una funzione derivabile due volte in $\mathbb{R}$, dimostrare che se

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leq 0 \quad \text{e} \quad f''(x) \geq 0,$$

allora la funzione f è costante.