1. Determinare il numero di soluzioni delle seguenti equazioni

$$\text{i) } \arcsin(x) = 2^{2-x^2}\ , \qquad \text{ii) } (x-1)e^x + \arctan(x^2) = 0\ ,$$

$$\text{iii) } e^{1/x} = x\sin(1/x)\ , \qquad \text{iv) } 2\cos(\cos(x)) = \sin(x)\ .$$

Svolgimento:

i) La funzione arcsen x è definita, continua e strettamente crescente in $[-1,1]$, quindi

$$[-1,1] \xrightarrow{\text{arcsen}\,x} [\text{arcsen}(-1), \text{arcsen}(1)] = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

La funzione $2^{2-x^2} = 4\cdot 2^{-x^2}$ è continua e derivabile in $\mathbb{R}$ e

$$\left(2^{2-x^2}\right)' = 4\cdot 2^{-x^2}\cdot \ln 2\cdot(-2x). \Rightarrow \quad + + + + \underset{0}{\bullet} - - - - - -$$

ossia è strettamente crescente in $(-\infty, 0]$ e strettamente decrescente in $[0,+\infty)$. Quindi

$$[-1,1] \xrightarrow{2^{2-x}} \left[\min_{[-1,1]} 2^{2-x}, \max_{[-1,1]} 2^{2-x}\right] = \left[2^{2-1}, 2^{2-0}\right] = [2,4].$$

Dato che $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \cap [2,4] = \emptyset$ (perché $\pi/2 < 2$) l'equazione data non ha soluzioni. $\square$

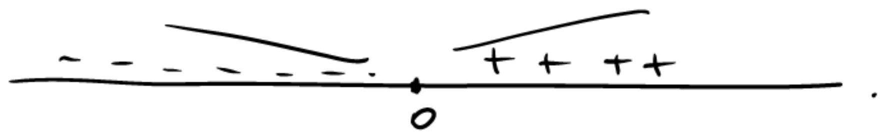
ii) Consideriamo la funzione

$$f(x) = (x-1)e^x + \operatorname{arctg}(x^2).$$

f è continua e derivabile in $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = e^x + (x-1)e^x + \frac{1}{1+x^4}\cdot(2x)$$

$$= \frac{x\left(2+e^x(1+x^4)\right)}{1+x^4} \geq 0 \iff x \geq 0$$

Quindi 

Dunque f è strettamente decrescente in $(-\infty, 0]$ e strettamente crescente in $[0,+\infty)$.

Ora $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} > 0$, $f(0) = -1 < 0$ e

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty > 0$.

Quindi per il teorema dei valori intermedi e la monotonia si ha che

$$\exists!\, x_1 \in (-\infty, 0) : \quad f(x_1) = 0,$$

$$\exists!\, x_2 \in (0, +\infty) : \quad f(x_2) = 0.$$

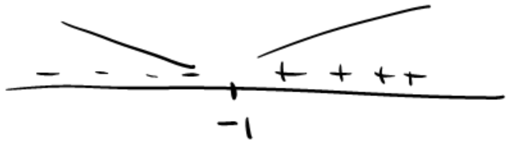
Le soluzioni dell'equazione data sono 2.

$\square$

iii) Posto $y = \frac{1}{x}$, basta trovare il numero di soluzioni dell'equazione

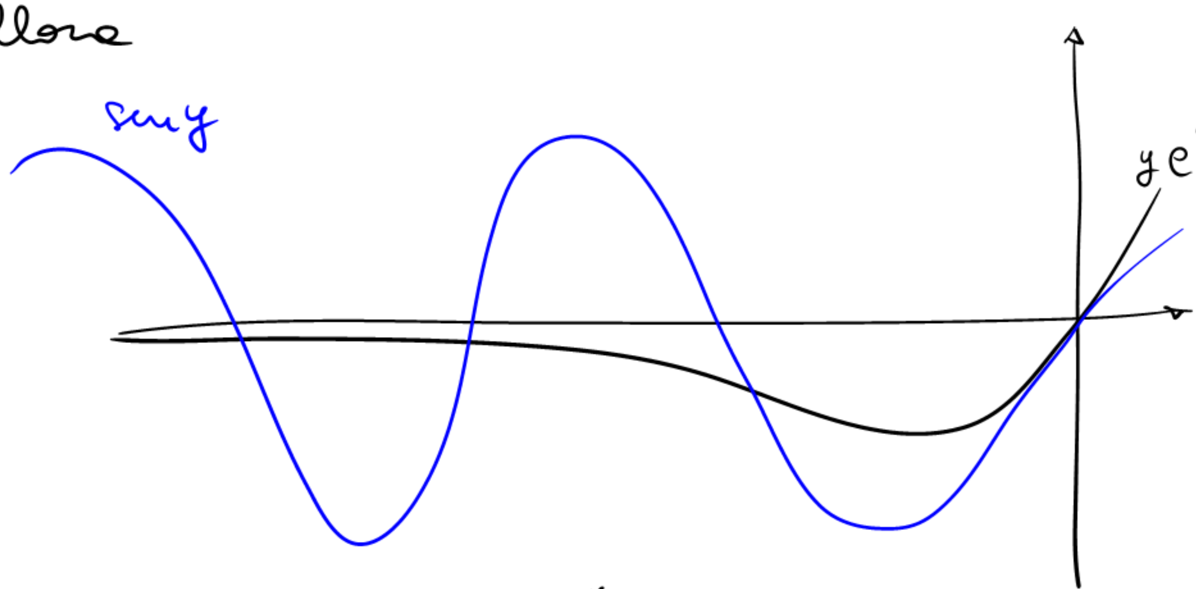
$$y e^y = \operatorname{sen}(y) \quad \text{in } \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Dato che $(y e^y)' = e^y(1+y)$



$\lim_{y \to +\infty} y e^y = +\infty$, $\lim_{y \to -\infty} y e^y = 0$ e $(-1)e^{-1} = -1/e > -1$

allora



e per ogni $y<0$, $-1 < y e^y < 0$.

Per ogni intero positivo k, siano

$$w_k = -\frac{\pi}{2} - 2k\pi \quad \text{e} \quad z_k = -\frac{3}{2}\pi - 2k\pi.$$

Allora

$$\operatorname{sen}(w_k) = -1 < w_k e^{w_k}, \quad \operatorname{sen}(z_k) = 1 > z_k e^{z_k}$$

e per continuità $\exists\, y_k \in (z_k, w_k) : \operatorname{sen}(y_k) = y_k e^{y_k}$.

Quindi l'equazione data ha infinite soluzioni. $\square$

iv) Osserviamo che

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\cos x} [-1,1] \xrightarrow{2\cos x} [2\cos(1), 2] \ , \quad \mathbb{R} \xrightarrow{\operatorname{sen} x} [-1,1]$$

ma $1 < 2\cos(1)$ perché $\frac{\pi}{3} > 1 \implies \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} < \cos(1)$.

Quindi $[2\cos(1), 2] \cap [-1,1] = \emptyset$ e questo implica che l'equazione data non ha soluzioni.

$\square$

2. Trovare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dei seguenti insiemi, dicendo se sono massimi o minimi:

$$\text{i) } \left\{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\ :\ x\in\mathbb{R}\right\}\ ,\quad \text{ii) } \left\{\arctan\left(1-\left|3\ln(x)-\frac{1}{x}\right|\right)\ :\ x\in\mathbb{R}^+\right\}\ ,$$

$$\text{iii) } \left\{\sin(x)^{\sin(x)}\ :\ x\in(0,1)\right\}\ ,\quad \text{iv) } \left\{x(3-(\ln|x|)^2)\ :\ x\in[-1,0)\cup(0,3]\right\}\ .$$

Svolgimento:

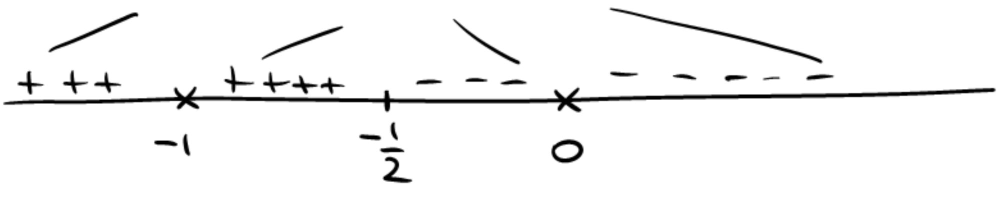
i) La funzione $f(x)=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}$ è continua in $\mathbb{R}$ e derivabile per $x\neq 0,-1$

$$f'(x)=\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{3}(x)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}\ \frac{(x)^{\frac{2}{3}}-(x+1)^{2/3}}{(x)^{2/3}\cdot(x+1)^{2/3}}$$

Dato che $x^{2/3}\cdot(x+1)^{2/3}>0$ per $x\neq 0,-1$ il segno di f' dipende solo dal numeratore

$$(x)^{2/3}>(x+1)^{2/3}\iff x^2>(x+1)^2\iff \cancel{x^2}>\cancel{x^2}+2x+1$$

Così il segno di $f'(x)$ è



Dato che $f(-\frac{1}{2})=\sqrt[3]{4}$ e

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}x^{1/3}\cdot\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/3}-1\right)=\lim_{x\to\pm\infty}x^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{3x}=0$$

possiamo concludere che $f(\mathbb{R})=(0,\sqrt[3]{4}]$,

$\inf\{\dots\}=0$ (no min) e $\sup\{\dots\}=\sqrt[3]{4}$ (max). $\square$

ii) La funzione $f(x) = 3\ln x - \frac{1}{x}$ è definita e continua in $(0,+\infty)$. Per $x>0$

$$f'(x) = \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$$

e f è strettamente crescente in $(0,+\infty)$.

Inoltre $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Quindi $f((0,+\infty)) = \mathbb{R}$.

La funzione $g(x) = \operatorname{arctg}(1-|x|)$ è continua in $\mathbb{R}$, pari e per $x>0$

$$g'(x) = \frac{-1}{1+(1-x)^2} < 0$$

da cui g è strettamente decrescente in $[0,+\infty)$ e strettamente crescente in $(-\infty,0]$.

Inoltre $g(0) = \frac{\pi}{4}$ e $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = -\frac{\pi}{2}$.

Quindi $g(\mathbb{R}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Infine $g(f(0,+\infty)) = g(\mathbb{R}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$ e

$\inf\{\dots\} = -\frac{\pi}{2}$ (no min), $\sup\{\dots\} = \frac{\pi}{4}$ (max).

$\square$

iii) La funzione $f(x)=(\operatorname{sen}x)^{\operatorname{sen}x}$ è continua e derivabile in $(0,1)$:

$$f'(x) = \left(\exp(\operatorname{sen}x \cdot \ln(\operatorname{sen}x))\right)'$$

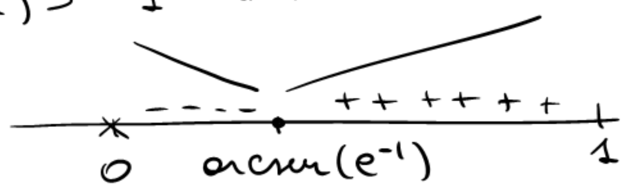
$$= \exp(\dots)\cdot\left(\cos x\cdot \ln(\operatorname{sen}x) + \frac{\cancel{\operatorname{sen}x}}{\cancel{\operatorname{sen}x}}\cdot\cos x\right)$$

$$= \underbrace{(\operatorname{sen}x)^{\operatorname{sen}x}}_{>0}\cdot\underbrace{\cos x}_{>0}\left(\ln(\operatorname{sen}x)+1\right).$$

Quindi $f'(x)>0$ in $(0,1)$ se e solo se

$$\ln(\operatorname{sen}x) > -1 \overset{x\in(0,1)}{\iff} x > \operatorname{arcsen}(e^{-1}) \in (0,1)$$

da cui



Dato che $f(\operatorname{arcsen}(e^{-1})) = e^{-1/e}$ e

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \exp\big(\underbrace{\operatorname{sen}x\cdot\ln(\operatorname{sen}x)}_{\to 0}\big) = 1$$

$\lim_{x\to1^-} f(x) = (\operatorname{sen}1)^{\operatorname{sen}1} < 1$, possiamo concludere

che $f((0,1)) = [e^{-1/e}, 1)$, $\inf\{\dots\} = e^{-1/e}$ (min)

e $\sup\{\dots\} = 1$ (no max). $\square$

iv) La funzione $f(x) = x \cdot \left(3 - (\ln|x|)^2\right)$

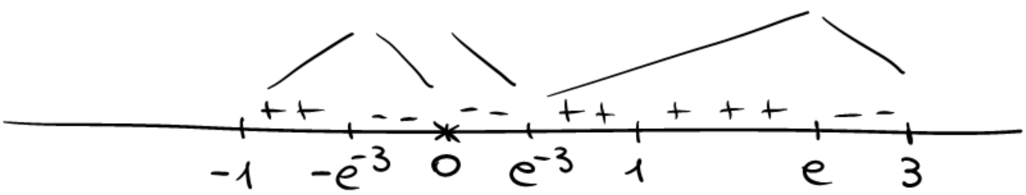
è continua e derivabile in $[-1,0) \cup (0,3]$.

Inoltre la funzione è dispari. Per $x>0$

$$f'(x) = 3 - (\ln x)^2 + x \cdot \left(-2\ln x \cdot \frac{1}{x}\right)$$
$$= 3 - 2\ln x - (\ln x)^2$$
$$= (3+\ln x)(1-\ln x)$$

Allora $f'(x)>0$ in $(0,3]$ sse $x \in (e^{-3}, e)$.

Quindi dato che la f è dispari



Ora $f(e^{-3}) = -6e^{-3} \in (-1,0)$, $f(-e^{-3}) = 6e^{-3} \in (0,1)$

$f(-1) = -3$, $f(e) = 2e > 5$,

$f(3) = 9 - 3(\ln 3)^2 > 0$ e $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

Quindi $\sup\{\dots\} = 2e$ (max) e

$\inf\{\dots\} = -3$ (min).

$\square$

3. Sia f una funzione continua in $[a, b]$ tale che $f([a, b]) \subseteq [a, b]$.

i) Dimostrare che esiste un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = x_0$.

ii) Dimostrare che se f è anche derivabile in (a, b) e $f'(x) \neq 1$ per ogni $x \in (a, b)$ allora esiste un unico punto $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = x_0$.

Svolgimento:

i) Sia $h(x) = f(x) - x$, allora

$h(a) = f(a) - a \geq a - a = 0$ e $h(b) = f(b) - b \leq b - b = 0$.

Quindi, visto che h è continua in $[a,b]$, per il teorema degli zeri $\exists\, x_0 \in [a,b] : h(x_0) = 0$

da cui $f(x_0) = x_0$.

$\square$

ii) Se $f'(x) \neq 1$ $\forall x \in (a,b)$ e $x_1 \in [a,b]$ è un altro punto in $[a,b]$ tale che $f(x_1) = x_1$ allora

per il teorema del valor medio

$$\exists\, t \in (x_1, x_2) \subseteq [a,b] : f'(t) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_2} = 1$$

contro l'ipotesi che $f'(x) \neq 1$ $\forall x \in [a,b]$. $\square$

4. Calcolare i seguenti limiti

$$\text{i)}\ \lim_{x\to 2}\frac{\ln(x^3-2x^2-4x+9)}{\ln(x^3-7x^2+16x-11)}\,,\qquad \text{ii)}\ \lim_{x\to+\infty}x^2\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}-\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right),$$

$$\text{iii)}\ \lim_{x\to-\infty}x^6\left(\arctan(x^2)-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x^2}\right)\,,\qquad \text{iv)}\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)\sqrt{1+x^2}}{1-\cos(x^2)}\,.$$

Svolgimento:

i)
$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x^3-2x^2-4x+9)}{\ln(x^3-7x^2+16x-11)}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{H}{=}\lim_{x\to 2}\overbrace{\left(\frac{x^3-7x^2+16x-11}{x^3-2x^2-4x+9}\right)}^{\to 1}\cdot\overbrace{\left(\frac{3x^2-4x-4}{3x^2-14x+16}\right)}^{\to -4}=-4$$

perché

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{3x^2-4x-4}{3x^2-14x+16}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{H}{=}\lim_{x\to 2}\frac{6x-4}{6x-14}=\frac{8}{-2}=-4.$$

$\square$

ii)
$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}-\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)\underset{y=\frac{1}{x}}{=}\lim_{y\to 0^+}\frac{(1+3y)^{1/3}-(1+2y)^{1/2}}{y^2}$$

Dato che $(1+t)^\alpha=1+\alpha t+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2+o(t^2)$

$$=\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{y^2}\left(\cancel{1}+\cancel{\frac{3y}{3}}-\frac{1}{9}(3y)^2+o(y^2)\right)-\left(\cancel{1}+\cancel{\frac{2y}{2}}-\frac{1}{8}(2y)^2+o(y^2)\right)$$

$$=\lim_{y\to 0^+}\frac{\left(-1+\frac{1}{2}\right)y^2+o(y^2)}{y^2}=-\frac{1}{2}.$$

$\square$

iii) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^6\left(\operatorname{arctg}(x^2)-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x^2}\right)$

$$\underset{y=1/x^2}{=}\lim_{y\to0^+}\frac{\operatorname{arctg}(1/y)-\frac{\pi}{2}+y}{y^3}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{H}{=}\lim_{y\to0^+}\frac{\frac{1}{1+1/y^2}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)+1}{3y^2}$$

$$=\lim_{y\to0^+}\frac{\cancel{-1}+\cancel{1}+y^2}{3y^2(y^2+1)}=\lim_{y\to0^+}\frac{1}{3(y^2+1)}=\frac{1}{3}.$$

$\square$

iv) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x\sqrt{1+x^2}}{1-\cos(x^2)}=\left(\frac{0}{0}\right)=$

$$\overset{H}{=}\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x\cdot(1+x^2)^{1/2}-\cos x\,(1/2)\cdot(1+x^2)^{-1/2}\cdot2x}{\operatorname{sen}(x^2)\cdot2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x\cdot(1+x^2)-\cos x\cdot x}{\operatorname{sen}(x^2)\cdot2x\,(1+x^2)^{1/2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)(1+x^2)-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\cdot x}{(x^2+o(x^2))\cdot2x\cdot(1+o(1))}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x}+x^3-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-\cancel{x}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{2x^3+o(x^3)}$$

$$=\frac{6-1+3}{2\cdot6}=\frac{2}{3}$$

dove abbiamo usato i seguenti fatti: per $x\to0$

$$\operatorname{sen}x=x+o(x)=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3),$$
$$(1+x^2)^{1/2}=1+o(1),$$
$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2).$$

$\square$

5. Dimostrare o confutare: se f è una funzione continua in $(-r, r)$ con $r > 0$ con un punto di minimo in 0 allora esiste un $0 < \delta < r$ tale che f è crescente in $[0, \delta)$ e f è decrescente in $(-\delta, 0]$.

Svolgimento: FALSO!

Ad esempio consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \left|x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

allora $f(x)$ è continua in $\mathbb{R}$ (si noti che $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$). Siccome $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ i punti dove la funzione si annulla, ossia 0 e $\frac{1}{k\pi}$ con $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, sono tutti di minimo assoluto.

Tuttavia f non è crescente in nessun intorno destro di 0: $\forall \delta > 0, \exists x, y : 0 < x < y < \delta$ e $f(x) > f(y)$.

Infatti sia $k \in \mathbb{N}^+$ tale che $0 < \frac{1}{k\pi} < \delta$ allora

$$y = \frac{1}{k\pi} > \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}} = x \quad \text{e} \quad f(y) = 0 < f(x) = x.$$

Infine, dato che f è pari, si ha anche che f non è decrescente in nessun intorno sinistro di 0. $\square$