

Tutorato di Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

28 novembre 2014

1. Determinare il numero di soluzioni delle seguenti equazioni

i) $\arcsin(x) = 2^{2-x^2}$, ii) $(x-1)e^x + \arctan(x^2) = 0$,

iii) $e^{1/x} = x \sin(1/x)$, iv) $2 \cos(\cos(x)) = \sin(x)$.

2. Trovare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dei seguenti insiemi, dicendo se sono massimi o minimi:

i) $\left\{ \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} : x \in \mathbb{R} \right\}$, ii) $\left\{ \arctan \left(1 - \left| 3 \ln(x) - \frac{1}{x} \right| \right) : x \in \mathbb{R}^+ \right\}$,

iii) $\left\{ \sin(x)^{\sin(x)} : x \in (0, 1) \right\}$, iv) $\left\{ x(3 - (\ln|x|)^2) : x \in [-1, 0) \cup (0, 3] \right\}$.

3. Sia f una funzione continua in $[a, b]$ tale che $f([a, b]) \subseteq [a, b]$.

i) Dimostrare che esiste un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = x_0$.

ii) Dimostrare che se f è anche derivabile in (a, b) e $f'(x) \neq 1$ per ogni $x \in (a, b)$ allora esiste un unico punto $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = x_0$.

4. Calcolare i seguenti limiti

i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^3 - 2x^2 - 4x + 9)}{\ln(x^3 - 7x^2 + 16x - 11)}$,

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\sqrt[3]{1 + \frac{3}{x}} - \sqrt{1 + \frac{2}{x}} \right)$,

iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^6 \left(\arctan(x^2) - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x^2} \right)$,

iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)\sqrt{1+x^2}}{1 - \cos(x^2)}$.

5. Dimostrare o confutare: se f è una funzione continua in $(-r, r)$ con $r > 0$ con un punto di minimo in 0 allora esiste un $0 < \delta < r$ tale che f è crescente in $[0, \delta)$ e f è decrescente in $(-\delta, 0]$.