1. Calcolare i seguenti limiti

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(2^{1+x}-1)^{1/x}$, ii) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{e^{\cos(5x)+1}+\cos(3x)}{(\sin(3x))^2}$,

iii) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(e^{3x}+e^{5x})}{\sqrt{(x-4)^4-1}-\sqrt[3]{(x+5)^6+1}}$, iv) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\ln\left(e+\frac{1}{n}\right)\right)^n$,

v) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/4}\frac{\cos(2x)\cdot(\sin(x)-\cos(x))}{(\ln(\tan(x)))^2}$, vi) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{e^{2x}-e^2(2-x)^{1/3}}{\sin(\pi x)}$.

Svolgimento: i) Per $x\to 0$, $2^x = e^{x\ln 2} = 1 + x\ln 2 + o(x)$.

$$(2^{1+x}-1)^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(1+2\left(2^x-1\right)\right)\right)$$
$$= \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(1+2\ln 2\, x+o(x)\right)\right)$$
$$= \exp\left(\frac{1}{x}\left(2\ln 2\, x+o(x)\right)\right)$$
$$= \exp\left(2\ln 2+o(1)\right) \to \exp(\ln 4) = 4. \qquad \square$$

ii) $$\lim_{x\to\pi}\frac{e^{\cos(5x)+1}+\cos(3x)}{(\operatorname{sen}(3x))^2}$$

$$\underset{y=x-\pi}{=}\ \lim_{y\to 0}\frac{e^{-\cos(5y)+1}-\cos(3y)}{(-\operatorname{sen}(3y))^2}$$

Ora per $y\to 0$

$$\cos(3y) = 1-\frac{(3y)^2}{2}+o(y^2)$$
$$\operatorname{sen}(3y) = 3y+o(y)$$
$$e^{1-\cos(5y)} = \exp\left((5y)^2/2+o(y^2)\right) = 1+\frac{(5y)^2}{2}+o(y^2).$$

Quindo

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\cancel{1}+\frac{25y^2}{2}-\cancel{1}+\frac{9y^2}{2}+o(y^2)}{9y^2+o(y^2)} = \frac{17}{9}. \qquad \square$$

iii) Consideriamo il numeratore. Per $x \to -\infty$

$$\ln\left(e^{3x}+e^{5x}\right) = \ln\left(e^{3x}\left(1+e^{2x}\right)\right)$$

$$= 3x + \ln\left(1+e^{2x}\right) = 3x + o(1).$$

Al denominatore

$$\sqrt{(x-4)^4-1} = x^2\left(\left(\left(1-\frac{4}{x}\right)^4 - \frac{1}{x^4}\right)\right)^{1/2} = x^2\left(1-\frac{16}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{1/2}$$

$$= x^2\left(1-\frac{8}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

$$\sqrt[3]{(x+5)^6+1} = x^2\left(\left(\left(1+\frac{5}{x}\right)^6 + \frac{1}{x^6}\right)\right)^{1/3} = x^2\left(1+\frac{30}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{1/3}$$

$$= x^2\left(1+\frac{10}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Allora il limite richiesto diventa

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}\left(3+o(1)/x\right)}{x^{\cancel{2}}\left(\cancel{1}-\frac{8}{x}-\cancel{1}-\frac{10}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{3+o(1)/x}{-18+o(1)} = -\frac{3}{18} = -\frac{1}{6}. \qquad \square$$

iv) Per $n \to \infty$ si ha che

$$\ln\left(e+\frac{1}{n}\right)\Big)^n = 1+\ln\left(1+\frac{1}{en}\right)\Big)^n$$

$$= \left(1+\frac{1}{en}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \exp\left(n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{en}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

$$= \exp\left(n\left(\frac{1}{en}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{e}+o(1)\right)$$

Quindi $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(e+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(\frac{1}{e}\right) = e^{1/e}$.

$\square$

v) Sia $t = x - \frac{\pi}{4} \to 0$. Allora

$$\cos(2x) = \cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}(2t) = -2t + o(t),$$

$$\operatorname{sen}(x) - \cos(x) = \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\operatorname{sen} t = \sqrt{2}t + o(t),$$

$$\operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{t}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} + o(t) = 1 + 2t + o(t),$$

$$\ln(\operatorname{tg}(x)) = \ln(1 + 2t + o(t)) = 2t + o(t).$$

Quindi

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \dots = \lim_{t \to 0} \frac{(-2t + o(t))(\sqrt{2}t + o(t))}{(2t + o(t))^2}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{-2\sqrt{2}\,t + o(t)}{4t^2 + o(t)} = \frac{-2\sqrt{2}}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad \square$$

vi) $$\lim_{x \to 1} \frac{e^{2x} - e^2(2-x)^{1/3}}{\operatorname{sen}(\pi x)}$$

$$\underset{y = x-1}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{y \to 0} \frac{e^{2y+2} - e^2(1-y)^{1/3}}{\operatorname{sen}(\pi + \pi y)} = -e^2 \cdot \lim_{y \to 0} \frac{e^{2y} - (1-y)^{1/3}}{\operatorname{sen}(\pi y)}$$

$$= -e^2 \lim_{y \to 0} \frac{\cancel{1} + 2y + o(y) - \left(\cancel{1} - \frac{1}{3}y + o(y)\right)}{\pi y + o(y)}$$

$$= -e^2 \lim_{y \to 0} \frac{7/3\, y + o(y)}{\pi y + o(y)} = -e^2 \lim_{y \to 0} \frac{7/3 + o(1)}{\pi + o(1)} = -\frac{7e^2}{3\pi}.$$

$\square$

2. Siano l_1 e l_2 le due rette tangenti alla parabola $y = x^2 - 4x + 3$ che passano per l'origine. Se l_1 è tangente alla parabola in $P_1 = (x_1, y_1)$ e l_2 è tangente alla parabola in $P_2 = (x_2, y_2)$, qual è la distanza tra P_1 e P_2?

Svolgimento:

Se $f(x) = x^2 - 4x + 3$ allora la retta tangente in P_i è

$$y = f(x_i) + f(x_i)(x - x_i)$$

e il fatto che passa per $(0,0)$ implica che

$$0 = f(x_i) + f'(x_i)(-x_i) \Rightarrow x_i f'(x_i) = f(x_i)$$

ossia $x_i(2x_i - 4) = x_i^2 - 4x_i + 3$, da cui $x_i^2 = 3$

e quindi $x_1 = \sqrt{3}$ e $x_2 = -\sqrt{3}$. Così

$$d(P_1, P_2) = \left|(\sqrt{3}, f(\sqrt{3})) - (-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3}))\right|$$

$$= \left((2\sqrt{3})^2 + (f(\sqrt{3}) - f(-\sqrt{3}))^2\right)^{1/2}$$

$$= \left((2\sqrt{3})^2 + (-4\sqrt{3} \cdot 2)^2\right)^{1/2}$$

$$= 2\sqrt{3}\sqrt{1+16} = 2\sqrt{51}.$$

$\square$

3. Rispondere alle seguenti domande.

i) Sia f una funzione derivabile in $(0,+\infty)$ tale che

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = L \in (0,+\infty).$$

La funzione f ha necessariamente un asintoto obliquo per $x \to +\infty$?

ii) I grafici delle funzioni $g(x) = e^{a/x}$ e $h(x) = \sqrt{x^3-1}$ si intersecano in un punto $P = (x_0, y_0)$. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$, le rette tangenti in P ai due grafici sono ortogonali?

Svolgimento:

i) NO. Ad esempio $f(x) = \ln(x) + x$ è derivabile in $(0,+\infty)$ e

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right) = 1 \in (0,+\infty)$$

ma $f(x)$ non ha un asintoto per $x\to+\infty$ perché

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right) = +\infty.$$

$\square$

ii) $h(x)$ è derivabile per $x>1$ e

$$h'(x) = \left(\left(x^3-1\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(x^3-1\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{2\,h(x)}.$$

Inoltre per $x>1$

$$g'(x) = \left(e^{a/x}\right)' = e^{a/x}\cdot a\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{a\,g(x)}{x^2}.$$

Nel punto di intersezione si ha che

$$y_0 = h(x_0) = g(x_0)$$

e quindi $x_0 > 1$ e $y_0 > 0$ $\left(0 = h(1) < g(1) = e^a \right)$.

In tale punto le rette tangenti sono

ortogonali se e solo se il prodotto dei

loro coefficienti angolari è uguale a -1

$$g(x_0) \cdot h(x_0) = \frac{-a \, \cancel{g(x_0)}}{\cancel{x_0^2}} \cdot \frac{3 \cancel{x_0^2}}{2 \, \cancel{h(x_0)}} \cdot = -\frac{3a}{2} \overset{?}{=} -1$$

da cui $a = \frac{2}{3}$. $\square$

4. Sia $f(x) = \tan x$.

i) Determinare $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$.

ii) Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$, esiste un polinomio P_n tale che

$$f^{(n)}(x) = P_n(f(x)).$$

iii) Calcolare $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{P_n(t)}{t^\alpha}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Svolgimento: i) $f'(x) = 1 + \mathrm{tg}^2 x$,

$$f''(x) = 2\,\mathrm{tg}\,x \cdot (1+\mathrm{tg}^2 x) = 2\,\mathrm{tg}^3 x + 2\,\mathrm{tg}\,x,$$

$$f'''(x) = (6\,\mathrm{tg}^2 x + 2)(1+\mathrm{tg}\,x) = 6\,\mathrm{tg}^4 x + 8\,\mathrm{tg}^2 x + 2.$$

$\square$

ii) Da i) abbiamo che

$P_1(t) = t^2+1$, $P_2(t) = 2t^3+2t$, $P_3(t) = 6t^4+8t^2+2$.

Da questi primi casi potremmo provare a dimostrare per induzione su n che

$$f^{(n)}(x) = P_n(f(x)) \quad \text{con} \quad P_n(t) = n! \cdot t^{n+1} + h_n(t).$$

dove h_n è un polinomio di grado $\leq n$.

Il passo base è già verificato.

Vediamo il passo induttivo.

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}\left(f^{(n)}(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(P_n(f(x))\right)$$

$$= P_n'(f(x)) \cdot f'(x) = P_n'(f(x)) \cdot (1 + f^2(x))$$

$$= P_{n+1}(f(x)) \quad \text{dove } P_{n+1}(t) = P_n'(t)(1+t^2).$$

Dato che P_n è un polinomio anche P_n' lo è e pure il prodotto P_n' per $(1+t^2)$, ossia P_{n+1}.

$$P_{n+1}(t) = \left(n!\,t^{n+1} + h_n(t)\right)'(1+t^2)$$

$$= \left((n+1)!\,t^{n} + h_n'(t)\right)(1+t^2)$$

$$= (n+1)!\,t^{n+2} + h_{n+1}(t)$$

dove $h_{n+1}(t) = t^2 h_n'(t) + (n+1)!\,t^n + h_n'(t)$ è un polinomio di grado $\leq n+1$. $\square$

iii) $$\lim_{t\to+\infty} \frac{P_n(t)}{t^\alpha} = \lim_{t\to+\infty} \frac{n!\,t^{n+1} + h_n(t)}{t^\alpha}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left(t^{n+1-\alpha}\right)\left(n! + o(1)\right)$$

$$= \begin{cases} n! & \text{se } \alpha = n+1 \\ +\infty & \text{se } 0 < \alpha < n+1 \\ 0 & \text{se } \alpha > n+1 \end{cases}.$$ $\square$

5. Per ogni intero positivo n, determinare una funzione $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia derivabile in $\mathbb{R}$ e che abbia la seguente proprietà: esiste un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che la retta tangente al grafico di f_n in $P_0 = (x_0, f_n(x_0))$ interseca il grafico di f_n esattamente in n punti, ma è tangente a tale grafico solo in P_0.

Svolgimento:

Un esempio di tale funzione è il polinomio

$$f_n(x) = x^2 \prod_{k=1}^{n-1} (x-k) = x^2 (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-(n-1)).$$

La derivata è

$$f_n'(x) = 2x \prod_{k=1}^{n-1} (x-k) + x^2 \sum_{i=1}^{n-1} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} (x-k).$$

Così per $x_0 = 0$ si ha che $f_n(x_0) = f_n'(x_0) = 0$ e la retta tangente in $(0,0)$ è $y=0$.

Le coordinate x dei punti di intersezione tra il grafico di f_n e tale retta sono esattamente n:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = f_n(x) \end{cases} \iff f_n(x) = x^2 \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (x-k) = 0$$

ossia $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Per verificare che $y=0$ non è tangente in $(i, f_n(i))$ per $i = 1, 2, \ldots, n-1$ al grafico di f_n, basta osservare che $f_n'(i) = i^2 \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n-1} (i-k) \neq 0$. $\square$