1. Calcolare i seguenti limiti

$$\text{i)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\sin(x^3)+x^4)}{\ln(\sin(1/x^3)+1/x^4)}\ ,\qquad \text{ii)}\ \lim_{x\to0^+}\frac{\ln(\sin(x))}{\ln(1/x+x)}\ ,$$

$$\text{iii)}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{n\arctan(n^n)-n^2\arctan(n!\pi/2)}{n\cos(n^n)-n^2\cos(n!\pi/2)}\ ,\qquad \text{iv)}\ \lim_{n\to+\infty}n^{\sqrt{n}}-2^n\ ,$$

$$\text{v)}\ \lim_{n\to+\infty}n\sin((3\sqrt[n]{2}-2\sqrt[n]{3})\pi)\ ,\qquad \text{vi)}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{\binom{3n}{n+2}}{\binom{3n+2}{2n-1}}\ .$$

Svolgimento:

i)
$$\frac{\ln(\operatorname{sen}(x^3)+x^4)}{\ln\left(\operatorname{sen}(1/x^3)+\frac{1}{x^4}\right)} = \frac{\ln\left(x^4\left(\frac{\operatorname{sen}(x^3)}{x^4}+1\right)\right)}{\ln\left(\frac{1}{x^3}\left(\frac{\operatorname{sen}(1/x^3)}{1/x^3}+\frac{1}{x}\right)\right)}$$

$$\stackrel{x>0}{=}\frac{4\ln x+\ln\left(\frac{\operatorname{sen}(x^3)}{x^4}+1\right)}{-3\ln x+\ln\left(\frac{\operatorname{sen}(1/x^3)}{1/x^3}+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\frac{\cancel{\ln x}}{\cancel{\ln x}}\,\frac{\left(4+\ln\Big(\overbrace{\frac{\operatorname{sen}(x^3)}{x^4}}^{\to0}+1\Big)\Big/\overbrace{\ln x}^{+\infty}\right)}{\left(-3+\ln\Big(\underbrace{\frac{\operatorname{sen}(1/x^3)}{1/x^3}}_{1^-}+\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}\Big)\Big/\underbrace{\ln x}_{+\infty}\right)}\xrightarrow{x\to+\infty}-\frac{4}{3}\,.$$

$\square$

ii)
$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(\operatorname{sen}x)}{\ln(1/x+x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x+\ln\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)}{-\ln x+\ln(1+x^2)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{\ln x}\left(1+\overbrace{\left(\frac{\ln\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)}{\ln x}\right)}^{\to0}\right)}{\cancel{\ln x}\left(-1+\underbrace{\left(\frac{\ln(1+x^2)}{\ln x}\right)}_{\to0}\right)}=-1\,.$$

$\square$

iii) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n\,\text{arctg}(n^n) - n^2\,\text{arctg}(n!\,\pi/2)}{n\cos(n^n) - n^2\cos(n!\,\pi/2)}$$

$$\underset{n>3}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(\left(\underbrace{\frac{\text{arctg}(n^n)}{n}}_{\to 0}\right) - \left(\underbrace{\text{arctg}(n!\cdot\pi/2)}_{\to \pi/2}\right)\right)}{\cancel{n^2}\left(\left(\underbrace{\frac{\cos(n^n)}{n}}_{\to 0}\right) - 1\right)} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{-1} = \frac{\pi}{2}.$$

$\square$

iv) $$\lim_{n\to+\infty} n^{\sqrt{n}} - 2^n = \lim_{n\to+\infty} 2^n\left(\frac{e^{\sqrt{n}\cdot\ln n}}{2^n} - 1\right) =$$

$$\lim_{n\to+\infty} (2^n)\left(\exp\Big(\underbrace{n\Big(\Big(\overbrace{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}}^{\to 0}\Big) - \ln 2\Big)}_{\to 0}\Big) - 1\right) = -\infty.$$

$\square$

v) $$\lim_{n\to+\infty} n\,\text{sen}\left((3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3})\pi + \pi - \pi\right)$$

$\text{sen}(\pi+t) = -\text{sen}\,t$

$$= -\lim_{n\to\infty} \frac{\text{sen}\left(\left(3\left(\overbrace{\frac{2^{1/n}-1}{1/n}}^{\to \ln 2}\right) - 2\left(\overbrace{\frac{3^{1/n}-1}{1/n}}^{\to \ln 3}\right)\right)\frac{\pi}{n}\right)}{1/n}$$

$$= -\pi\,(3\ln 2 - 2\ln 3) = \pi\ln\left(\frac{9}{8}\right).$$

$\square$

vi) $$\frac{\binom{3n}{n+2}}{\binom{3n+2}{2n-1}} = \frac{(3n)!}{(n+2)!\,(2n-2)!}\cdot\frac{(2n-1)!\cdot(n+3)!}{(3n+2)!} = \frac{(n+3)(2n-1)}{(3n+2)(3n+1)}$$

Così

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\binom{3n}{n+2}}{\binom{3n+2}{2n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+5n-3}{9n^2+9n+2} = \frac{2}{9}.$$

$\square$

2. Determinare se esiste il limite (e nel caso calcolarlo) delle seguenti successioni definite per ricorrenza.

i) $x_0 = \sqrt{2}$ e $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ per ogni intero $n \geq 0$.

ii) $x_0 = 1$ e $x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n}$ per ogni intero $n \geq 0$.

iii) $x_0 = 9$ e $x_{n+1} = \left\lfloor \dfrac{x_n(28 - x_n)}{7} \right\rfloor$ per ogni intero $n \geq 0$.

Svolgimento: i) Osserviamo che

$$1 < x < 2 \Rightarrow x^2 < 2 + x < 4 \Rightarrow x < \sqrt{2+x} < 2$$

Quindi $\forall n \geq 0$, $1 < x_n < 2 \Rightarrow 1 < x_n < x_{n+1} < 2$.

ossia la successione $\{x_n\}_{n \geq 0}$ è strettamente crescente e superiormente limitata.

Così $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = L \leq 2$. Inoltre

$$L \leftarrow x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \longrightarrow \sqrt{2+L}.$$

Da cui $L = 2$. $\square$

ii) I primi termini della successione sono

$$x_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad x_3 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

Verifichiamo per induzione che per $n \geq 0$,

$$x_n = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}.$$

Per $n = 0$, $x_0 = 1 = \dfrac{F_2}{F_1} = \dfrac{1}{1}$ OK.

Per $n \geq 1$, $x_n = 1 + \frac{1}{x_{n-1}} = x_n = 1 + \frac{1}{F_{n+1}/F_n}$

$$= \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}.$$

Quindi ricordando che

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad e \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

si conclude

$$x_n = \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}} = \alpha \left(\frac{1 - (\beta/\alpha)^{n+2}}{1 - (\beta/\alpha)^{n+1}} \right) \to \alpha. \qquad \square$$

iii) Si nota che

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_n	9	24	13	27	3	10	25	10	25

Siccome x_{n+1} dipende solo da x_n e $x_5 = x_7 = 10$ la successione diventa periodica per $n \geq 5$.

Quindi

$$\forall k \geq 0, \quad x_{5+2k} = 10 \quad e \quad \lim_{k \to +\infty} x_{5+2k} = 10,$$

$$\forall k \geq 0, \quad x_{6+2k} = 25 \quad e \quad \lim_{k \to +\infty} x_{6+2k} = 25.$$

Dato che lungo queste due sottosuccessioni i limiti sono diversi, $\nexists \lim_{n \to +\infty} x_n$. $\square$

3. Sia $\{a_n\}_{n\geq 0}$ una successione di numeri reali positivi tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n\ln(n)} = 1.$$

i) Calcolare $\lim_{n\to+\infty} a_n$ e $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(a_n)}{n}$.

ii) Se k è un numero intero positivo, quanto vale il limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{kn}}{a_n}$?

Svolgimento:

i)

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left(\frac{a_n}{n\ln n}\right)}_{\to 1} \cdot \underbrace{\left(n \ln n\right)}_{\to +\infty} = +\infty .$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(a_n)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{a_n}{n\ln n}\right) + \ln(n\ln n)}{n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\underbrace{\left(\frac{\ln\left(\frac{a_n}{n\ln n}\right)}{n}\right)}_{\to 0} + \underbrace{\left(\frac{\ln n}{n}\right)}_{\to 0} + \underbrace{\left(\frac{\ln(\ln n)}{n}\right)}_{\to 0} \right) = 0. \qquad \square$$

ii)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{nk}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a_{nk}}{(nk)\ln(nk)} \cdot \frac{n\ln n}{a_n} \cdot \frac{(nk)\ln(nk)}{n\ln n} \right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\underbrace{\left(\frac{a_{nk}}{(nk)\ln(nk)}\right)}_{\to 1} \cdot \underbrace{\left(\frac{n\ln n}{a_n}\right)}_{\to 1} \cdot \left(\frac{k\cancel{\ln n}}{\cancel{\ln n}} + \underbrace{\left(\frac{k\ln k}{\ln n}\right)}_{\to 0} \right) \right) = k. \qquad \square$$

4. Verificare che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \frac{2^{2-x} - 2^{2+x}}{3}$$

è invertibile, trovare la funzione inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e determinare l'insieme $f^{-1}((-5, 2))$.

Svolgimento: Per determinare l'eventuale funzione inversa $f^{-1}(y)$, risolviamo l'equazione $f(x)=y$.

$$\frac{2^{2-x} - 2^{2+x}}{3} = y \iff \frac{4 - 4\cdot 2^{2x}}{3\cdot 2^x} = y \overset{z=2^x}{\iff} 4z^2 + (3y)z - 4 = 0$$

$$\iff z = \frac{-3y \pm \sqrt{9y^2+64}}{8}$$

il segno $-$ non dà una soluzione ammissibile perché altrimenti $0 < 2^x = z < 0$.

Inoltre $\sqrt{9y^2+64} > \sqrt{9y^2} = 3|y| \geq 3y$ quindi il segno $+$ dà una soluzione ammissibile. Abbiamo così stabilito che $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists!\, x \in \mathbb{R}$ tale che $y = f(x)$, ossia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è biunivoca e la funzione inversa è $f^{-1}(y) = \log_2\left(\frac{\sqrt{9y^2+64} - 3y}{8}\right)$.

Dato che f è continua e biunivoca deve essere strettamente monotona e quindi anche f^{-1} è continua e strettamente monotona. Ora

$$f^{-1}(2) = \log_2\left(\frac{10-6}{8}\right) = -1 < f^{-1}(-5) = \log_2\left(\frac{17+15}{8}\right) = 2.$$

Quindi f^{-1} è strettamente decrescente e per la continuità, $f^{-1}((-5,2)) = (f^{-1}(2), f^{-1}(-5)) = (-1, 2)$.

$\square$

5. Dimostrare o confutare.

i) Esiste una funzione f continua in $(0,1)$ tale che $f((0,1)) = [0,1]$.

ii) Esiste una funzione g continua in $[0,1]$ tale che $g([0,1]) = (0,1)$.

iii) Esiste una funzione h continua in $\mathbb{R}$ tale che $h(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \cap \mathbb{Q} = \emptyset$ e $h(\mathbb{Z}) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

Svolgimento: i) ESISTE. Ad esempio $f(x) = \dfrac{\sin(2\pi x)+1}{2}$:

$$(0,1) \xrightarrow{2\pi x} (0,2\pi) \xrightarrow{\sin x} [-1,1] \xrightarrow{\frac{x+1}{2}} [0,1]. \qquad \square$$

ii) NON ESISTE. Se f è continua in $[0,1]$ allora

$$f([0,1]) = \left[\min_{[0,1]} f(x), \max_{[0,1]} f(x)\right]$$

ossia $f([0,1])$ è un intervallo chiuso e limitato mentre $(0,1)$ non è chiuso. $\square$

iii) NON ESISTE. Se $h(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}) \cap \mathbb{Q} = \emptyset$ allora $\forall n \in \mathbb{Z}$, $h((n,n+1)) \subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Dato che tra due irrazionali distinti c'è sempre almeno un razionale, per la continuità di h e il teorema dei valori intermedi h è costante in $(n,n+1)$.
Sia $a_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ questa costante.
Se $h(\mathbb{Z}) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ allora $\exists\, n_0 \in \mathbb{Z} : h(n_0) \in \mathbb{Q}$.
Quindi per la continuità in n_0

$$\mathbb{Q} \ni h(n_0) = \lim_{x \to n_0^+} h(x) = a_{n_0} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \qquad \square$$

Contraddizione.