Tutorato di Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma “Tor Vergata”
14 novembre 2014

1. Calcolare i seguenti limiti

i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\sin(x^3)+x^4)}{\ln(\sin(1/x^3)+1/x^4)}$, ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin(x))}{\ln(1/x+x)}$,

iii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n\arctan(n^n)-n^2\arctan(n!\pi/2)}{n\cos(n^n)-n^2\cos(n!\pi/2)}$, iv) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^{\sqrt{n}}-2^n$,

v) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\sin((3\sqrt[n]{2}-2\sqrt[n]{3})\pi)$, vi) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\binom{3n}{n+2}}{\binom{3n+2}{2n-1}}$.

2. Determinare se esiste il limite (e nel caso calcolarlo) delle seguenti successioni definite per ricorrenza.

i) $x_0=\sqrt{2}$ e $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$ per ogni intero $n\geq 0$.

ii) $x_0=1$ e $x_{n+1}=1+\dfrac{1}{x_n}$ per ogni intero $n\geq 0$.

iii) $x_0=9$ e $x_{n+1}=\left\lfloor \dfrac{x_n(28-x_n)}{7}\right\rfloor$ per ogni intero $n\geq 0$.

3. Sia $\{a_n\}_{n\geq 0}$ una successione di numeri reali positivi tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n\ln(n)}=1.$$

i) Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n$ e $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(a_n)}{n}$.

ii) Se k è un numero intero positivo, quanto vale il limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{kn}}{a_n}$?

4. Verificare che la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita come

$$f(x)=\frac{2^{2-x}-2^{2+x}}{3}$$

è invertibile, trovare la funzione inversa $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e determinare l'insieme $f^{-1}((-5,2))$.

5. Dimostrare o confutare.

i) Esiste una funzione f continua in $(0,1)$ tale che $f((0,1))=[0,1]$.

ii) Esiste una funzione g continua in $[0,1]$ tale che $g([0,1])=(0,1)$.

iii) Esiste una funzione h continua in $\mathbb{R}$ tale che $h(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})\cap\mathbb{Q}=\emptyset$ e $h(\mathbb{Z})\cap\mathbb{Q}\neq\emptyset$.