1. Calcolare i seguenti limiti

i) $\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{n^n}$, ii) $\lim_{n\to+\infty} (a^n+b^n)^{1/n}$ con $a, b \geq 0$,

iii) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2+n}{n^2-n+2}\right)^{3n-1}$, iv) $\lim_{n\to+\infty} (n!)^{1/n}$,

v) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{7+2\arctan(\ln(n))}{5+3\cos(n)+2(-1)^n}\right)^n$, vi) $\lim_{n\to+\infty} \left\lfloor \cos^2\left(\frac{\pi(2^n-2)}{n}\right)\right\rfloor$.

Svolgimento:

i) Dato che $\frac{(2n)!}{n^n} = \underbrace{\frac{2n}{n}}_{>1} \cdot \underbrace{\frac{2n-1}{n}}_{>1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{>1} \cdot n! > n!$

e per confronto si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{n^n} = +\infty . \qquad \square$$

ii) Se $a=b$ allora $(a^n+b^n)^{1/n} = (2b^n)^{1/n} = 2^{1/n} \cdot b \to b$.

Se $a<b$ allora $0 < a/b < 1$ e

$$(a^n+b^n)^{1/n} = b\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n+1\right)^{1/n} = b \cdot \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^n\right)\right)$$

$$= b \exp\left(\underbrace{\frac{\ln\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^n\right)}{\left(\frac{a}{b}\right)^n}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n}{n}}_{\to 0}\right) \to b .$$

Analogamente se $a>b$ il limite vale a.

Quindi $\lim_{n\to+\infty} (a^n+b^n)^{1/n} = \max(a,b)$. $\square$

iii) Si ha che

$$\left(\frac{n^2+n}{n^2-n+2}\right)^{3n-1} = \left(1+\frac{2n-2}{n^2-n+2}\right)^{3n-1} = \exp\left((3n-1)\ln\left(1+\frac{2n-2}{n^2-n+2}\right)\right)$$

$$= \exp\left(\underbrace{\frac{(3n-1)(2n-2)}{n^2-n+2}}_{\to 6}\cdot\underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{2n-2}{n^2-n+2}\right)}{\frac{2n-2}{n^2-n+2}}}_{\to 1}\right)\to e^6.$$

$\square$

iv) Prima dimostriamo che

$$\forall n\geq 1,\quad n! \geq \left(\frac{n}{3}\right)^n.$$

Per $n=1$ vale e se vale per un certo $n\geq 1$ allora

$$(n+1)! \geq (n+1)\left(\frac{n}{3}\right)^n \overset{?}{\geq} \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}$$

dove l'ultima disuguaglianza è equivalente a

$$\frac{n^n}{\cancel{3^n}} \geq \frac{(n+1)^n}{3^{\cancel{n}+1}} \iff 3\geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

che vale (è stata dimostrata a lezione).

Quindi $(n!)^{1/n}\geq \frac{n}{3}$ e per confronto

$$\lim_{n\to+\infty}(n!)^{1/n} = +\infty.$$

$\square$

v) Notiamo che per $n \in \mathbb{N}^+$, $-1 < \cos(n) < 1$ e

$$0 < 5 + 3\cos(n) + 2(-1)^n < 5 + 3 + 2 = 10.$$

Inoltre

$$7 + 2\operatorname{arctg}(\ln(n)) \to 7 + \cancel{2}\frac{\pi}{\cancel{2}} = 7 + \pi$$

e dunque $\exists\, n_0 : \forall n > n_0$ $\quad \pi > 3.14$

$$7 + 2\operatorname{arctg}(\ln(n)) > 7 + \pi - \frac{4}{100} > 10.1 .$$

Così

$$\left(\frac{7 + 2\operatorname{arctg}(\ln(n))}{5 + 3\cos(n) + 2(-1)^n}\right)^n > \Bigg(\underbrace{\frac{10.1}{10}}_{>1}\Bigg)^n \to +\infty .$$

$\square$

vi) Notiamo che

$$\lfloor \cos^2(\pi x) \rfloor = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se p_n è l'n-esimo numero primo allora, per il piccolo teorema di Fermat, p_n divide $2^{p_n} - 2$ e quindi

$$\left\lfloor \cos^2\left(\frac{\pi(2^{p_n} - 2)}{p_n}\right) \right\rfloor = 1 \to 1.$$

Invece se $x_n = 4n$ allora per $n>0$

$$\frac{2^{x_n}-2}{x_n} = \frac{2^{4n}-2}{4n} = \frac{2^{4n-1}-1}{2n} \quad \text{non è intero}$$

perché $2n$ è pari e $2^{4n-1}-1$ è dispari.

Quindi

$$\left\lfloor \cos^2\left(\frac{\pi(2^{x_n}-2)}{x_n}\right)\right\rfloor = 0 \longrightarrow 0 .$$

Possiamo così concludere che il limite richiesto non esiste perché abbiamo trovato due sottosuccessioni in $\mathbb{N}^+$ lungo le quali i limiti esistono ma sono diversi. $\square$

2. Determinare gli eventuali asintoti per $x \to \pm\infty$ delle seguenti funzioni

i) $\ln(5e^{2x} + 20e^{x} + 3e^{-x})$, ii) $\ln(1 + x^2 e^x)$,

iii) $x \arctan(x)$, iv) $\dfrac{1}{5 + 3x + 3\sqrt{x^2 - x - 1}}$,

v) $\dfrac{2|x|^3 + 2x^2 + \sqrt{x^4 + 2}}{x^2 + e^x(1 + \sin(x)) + 3}$, vi) $\dfrac{2x^2 + (e^x - \lfloor e^x \rfloor)\sqrt{x} + x + 3}{x + \arctan(x)}$.

Svolgimento:

i) Dato che $f(x) = 2x + \ln(5 + 20e^{-x} + 3e^{-3x})$ allora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = \ln 5.$$

Quindi per $x \to +\infty$, l'asintoto è $y = 2x + \ln 5$.

Dato che $f(x) = -x + \ln(5e^{3x} + 20e^{2x} + 3)$ allora

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) + x = \ln 3$$

Quindi per $x \to -\infty$, l'asintoto è $y = -x + \ln 3$. $\square$

ii) Per $x > 0$, $f(x) = 2\ln x + x + \ln\left(\frac{e}{x^2} + 1\right)$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad \text{ma} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) - x = +\infty$$

quindi per $x \to +\infty$ non c'è un asintoto.

Inoltre $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln(1) = 0$ quindi

per $x \to -\infty$, l'asintoto è $y = 0$. $\square$

iii) Osserviamo che per $f(x) = x \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) \mp \frac{\pi}{2}x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(\operatorname{arctg} x \mp \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\underset{\uparrow}{=} \lim_{y\to 0^\mp} \operatorname{tg}\left(y \pm \frac{\pi}{2}\right)\cdot y = \lim_{y\to 0^\mp} \frac{y}{-\operatorname{tg}(y)} = -1.$$

$y = \operatorname{arctg} x \mp \frac{\pi}{2}$

Quindi gli asintoti per $x\to\pm\infty$ sono

$$y = \pm\frac{\pi}{2}x - 1. \qquad \square$$

iv) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{5+3x+3\sqrt{x^2-x-1}} = 0$$

Quindi l'asintoto per $x\to+\infty$ è $y=0$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{5+3x+3\sqrt{x^2-x-1}} \cdot \frac{5+3x-3\sqrt{x^2-x-1}}{5+3x-3\sqrt{x^2-x-1}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{5+3x-3\cdot(-x)\cdot\sqrt{1-1/x-1/x^2}}{25+\cancel{9x^2}+15x-9(\cancel{x^2}-x-1)} = \frac{3+3}{15+9} = \frac{2}{13}$$

Quindi l'asintoto per $x\to-\infty$ è $y = \frac{2}{13}$.

$\square$

v) Sia $f(x) = \dfrac{2|x|^3 + 2x^2 + \sqrt{x^4+2}}{x^2 + e^x(1+\operatorname{sen} x) + 3}$.

Per $x \to +\infty$ l'asintoto non c'è perché non esiste il limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Infatti se $x_n = \pi + 2n\pi$ per $n \geq 0$ allora $x_n \to +\infty$ e

$$f(x_n) = \frac{2x_n^3 + 2x_n^2 + \sqrt{x_n^4+2}}{x_n^2+3} \geq \frac{2x_n^3}{x_n^2+3} = \frac{2x_n}{1+3/x_n^2} \to +\infty$$

mentre se $y_n = 2n\pi$ per $n \geq 1$ allora $y_n \to +\infty$ e $\neq$

$$f(y_n) = \frac{2y_n^3 + 2y_n^2 + \sqrt{y_n^4+2}}{y_n^2 + \exp(y_n) + 3} = \frac{2 + 2/y_n + \sqrt{1/y_n^2 + 2/y_n^6}}{1/y_n + \frac{\exp(y_n)}{y_n^3} + 3/y_n^3} \to 0.$$

Per $x<0$,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\cancel{x^3}\left(-2 + 2/x + \sqrt{1/x^2 + 2/x^6}\right)}{\cancel{x^3}\left(1 + \frac{e^x(1+\operatorname{sen} x)}{x^3} + \frac{3}{x^3}\right)} \xrightarrow{x\to-\infty} -2 = m$$

e $f(x) - mx =$

$$= \frac{-\cancel{2x^3} + 2x^2 + \sqrt{x^4+2} + \cancel{2x^3} + 2xe^x(1+\operatorname{sen} x) + 6x}{x^2\left(1 + \frac{e^x(1+\operatorname{sen} x)}{x^2} + \frac{3}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{\cancel{x^2}\left(2 + \sqrt{1+2/x^2} + 2e^x/x^2(1+\operatorname{sen} x) + 6/x\right)}{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{e^x(1+\operatorname{sen} x)}{x^2} + \frac{3}{x^2}\right)}$$

$$\xrightarrow{x\to-\infty} 2+1 = 3 = q$$

Quindi per $x \to -\infty$ l'asintoto è $y = -2x+3$. $\square$

vi) Intanto osserviamo che l'insieme di definizione è $(0,+\infty)$ quindi basta considerare il caso per $x \to +\infty$.

Inoltre

$$\underbrace{\left(e^x - \lfloor e^x \rfloor\right)}_{L\,\in[0,1)} \underbrace{\left(\frac{\sqrt{x}}{x+\operatorname{arctg} x}\right)}_{\to 0} \to 0$$

e quindi non è rilevante nel calcolo.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{2x^2+x+3}{x+\operatorname{arctg} x}\right) = 2 = m$$

e

$$\frac{2x^2+x+3}{x+\operatorname{arctg} x} - 2x = \frac{\cancel{2x^2}+x+3-\cancel{2x^2}-2x\operatorname{arctg} x}{x+\operatorname{arctg} x}$$

$$= \frac{\cancel{x}\left(1+\frac{3}{x}-2\operatorname{arctg} x\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)} \to 1-\pi = q.$$

Così l'asintoto per $x \to +\infty$ è $y = 2x+1-\pi$. $\square$

3. Sia $\{F_n\}_{n\geq 0}$ la successione tale che

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \text{ e } F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ per } n \geq 2.$$

Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{F_n}{F_{n+1}}$ e $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{F_n}$.

Svolgimento: È noto che per $n \geq 0$,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \quad \text{dove} \quad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Quindi

$$\frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{1-(\beta/\alpha)^n}{1-(\beta/\alpha)^{n+1}}$$

$$\to \frac{1}{\alpha} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

perché $|\beta/\alpha| < 1$ e $(\beta/\alpha)^n \to 0$.

Inoltre

$$\sqrt[n]{F_n} = \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{2}\right)^{1/n} = \alpha \exp\left(\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \underbrace{\ln\left(\frac{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{2}\right)}_{\ln(1/2)}\right)$$

$$\to \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

$\square$

4. Sia $\{x_n\}_{n\geq 0}$ una successione di numeri reali positivi tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L < 1.$$

Dimostrare che $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Svolgimento:

Per la definizione di limite

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0\in\mathbb{N}: \ \forall n\geq n_0, \quad L-\varepsilon < \frac{x_{n+1}}{x_n} < L+\varepsilon.$$

Quindi $\forall n \geq n_0$, $x_{n+1} < (L+\varepsilon)x_n$ e per $k\geq 1$

$$x_{n_0+k} < (L+\varepsilon)x_{n_0+k-1} < (L+\varepsilon)^2 x_{n_0+k-2} < \cdots < (L+\varepsilon)^k x_{n_0}.$$

Così se scegliamo $\varepsilon>0$ in modo che $L+\varepsilon<1$

(ad esempio ponendo $\varepsilon=(1-L)/2>0$) si ha che

$$0 \leftarrow 0 \leq x_{n_0+k} < (L+\varepsilon)^k x_{n_0} \to 0$$

e per il teorema del doppio confronto si può concludere che

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{k\to+\infty} x_{n_0+k} = 0.$$

$\square$

5. Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni.

i) Se una funzione razionale ammette un asintoto $y = mx+q$ per $x \to +\infty$ allora ammette lo stesso asintoto per $x \to -\infty$.

ii) Esistono due funzioni razionali f e g tali che la funzione $h = f + |g|$ ha come asintoti $y = 7x + 1$ per $x \to +\infty$, $y = 5x + 3$ per $x \to -\infty$ e il grafico di h non interseca mai tali rette.

Svolgimento:

i) VERO.

Sia $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ una funzione razionale

con $P(x) = a_r x^r + \dots + a_0$, $a_r \neq 0$ e $r \geq 0$

$Q(x) = b_s x^s + \dots + b_0$, $b_s \neq 0$ e $s \geq 0$

allora distinguiamo i seguenti casi.

$\boxed{r > s+1}$ Allora $\dfrac{f(x)}{x}$ non è limitata per $x \to \pm\infty$ e quindi f non ha asintoti sia a $+\infty$ che a $-\infty$.

$\boxed{r < s}$ Allora $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ e f ha come asintoto $y = 0$ per $x \to \pm\infty$.

$\boxed{r = s}$ Allora $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \dfrac{a_r}{b_s}$ e f ha come asintoto $y = \dfrac{a_r}{b_s}$ per $x \to \pm\infty$.

$\boxed{r = s+1}$ Allora $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{a_r}{b_s} = m \neq 0$ e

$$f(x) - \frac{a_r}{b_s}x = \frac{b_s P(x) - a_r x \cdot Q(x)}{b_s Q(x)}$$

$$= \frac{\cancel{b_s a_r x^r} + b_s a_{r-1} x^{r-1} + \dots - \cancel{a_r b_s x^r} - a_r b_{s-1} x^{r-1} + \dots}{b_s^2 x^{r-1} + \dots}$$

$$\to \frac{b_s a_{r-1} - a_r b_{s-1}}{b_s^2} = q \quad \text{per } x \to \pm\infty$$

e f ha come asintoto obliquo $y = mx + q$ per $x \to \pm\infty$. $\square$

ii) VERO. Ad esempio $f(x) = 6x + 2 + \frac{1}{x^2+1}$ e $g(x) = x - 1$. Così se $h = f + |g|$

$$h(x) - (7x+1) \underset{\substack{\uparrow \\ x>1}}{=} \frac{1}{x^2+1} \to 0 \quad \text{per } x \to +\infty$$

$$h(x) - (5x+3) \underset{\substack{\uparrow \\ x<1}}{=} \frac{1}{x^2+1} \to 0 \quad \text{per } x \to -\infty$$

Inoltre $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = 6x + 2 + \frac{1}{x^2+1} + |x-1| > 6x + 2 + |x-1|$$

$$\geq 6x + 2 + x - 1 = 7x + 1$$

$$\geq 6x + 2 + 1 - x = 5x + 3$$

e quindi $h(x)$ non interseca mai i suoi asintoti. $\square$