

Tutorato di Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

7 novembre 2014

1. Calcolare i seguenti limiti

- i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!}{n^n}$, ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a^n + b^n)^{1/n}$ con $a, b \geq 0$,
- iii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 + n}{n^2 - n + 2} \right)^{3n-1}$, iv) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n!)^{1/n}$,
- v) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{7 + 2 \arctan(\ln(n))}{5 + 3 \cos(n) + 2(-1)^n} \right)^n$, vi) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\cos^2 \left(\frac{\pi(2^n - 2)}{n} \right) \right]$.

2. Determinare gli eventuali asintoti per $x \rightarrow \pm\infty$ delle seguenti funzioni

- i) $\ln(5e^{2x} + 20e^x + 3e^{-x})$, ii) $\ln(1 + x^2 e^x)$,
- iii) $x \arctan(x)$, iv) $\frac{1}{5 + 3x + 3\sqrt{x^2 - x - 1}}$,
- v) $\frac{2|x|^3 + 2x^2 + \sqrt{x^4 + 2}}{x^2 + e^x(1 + \sin(x)) + 3}$, vi) $\frac{2x^2 + (e^x - \lfloor e^x \rfloor)\sqrt{x} + x + 3}{x + \arctan(x)}$.

3. Sia $\{F_n\}_{n \geq 0}$ la successione tale che

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \text{ e } F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ per } n \geq 2.$$

Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_n}{F_{n+1}}$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{F_n}$.

4. Sia $\{x_n\}_{n \geq 0}$ una successione di numeri reali positivi tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L < 1.$$

Dimostrare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.

5. Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni.

- i) Se una funzione razionale ammette un asintoto $y = mx + q$ per $x \rightarrow +\infty$ allora ammette lo stesso asintoto per $x \rightarrow -\infty$.
- ii) Esistono due funzioni razionali f e g tali che la funzione $h = f + |g|$ ha come asintoti $y = 7x + 1$ per $x \rightarrow +\infty$, $y = 5x + 3$ per $x \rightarrow -\infty$ e il grafico di h non interseca mai tali rette.