1. Calcolare i seguenti limiti

$$\text{i) } \lim_{x\to\pi}\frac{(\cos(x/2))^2}{(\pi-x)^2}, \qquad \text{ii) } \lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}, \qquad \text{iii) } \lim_{x\to 0}(\cos(2x))^{1/x^2},$$

$$\text{iv) } \lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^7-1}, \qquad \text{v) } \lim_{x\to -3}\frac{x+3}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3}}, \qquad \text{vi) } \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3}}.$$

Svolgimento:

$$y=\frac{x-\pi}{2}$$

$$\text{i) } \lim_{x\to\pi}\frac{(\cos(x/2))^2}{(\pi-x)^2} \overset{\uparrow}{=} \lim_{y\to 0}\frac{\left(\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right)^2}{(-2y)^2}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{(-\operatorname{sen} y)^2}{4y^2} = \frac{1}{4}\lim_{y\to 0}\Big(\underbrace{\frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\to 1}\Big)^2 = \frac{1}{4}. \quad \square$$

$$\text{ii) } \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x)-\operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\Big(\underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\to 1}\Big)\cdot\Big(\underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\to 1}\Big)\Big(\underbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}_{\to \frac{1}{2}}\Big) = \frac{1}{2}. \quad \square$$

$$\text{iii) } \lim_{x\to 0}(\cos(2x))^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{x^2}\cdot\ln(\cos(2x))\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\exp\left(\Big(\underbrace{\frac{\ln(1+(\cos 2x-1))}{\cos 2x-1}}_{\to 1}\Big)\cdot\Big(\underbrace{\frac{\cos 2x-1}{(2x)^2}}_{\to -\frac{1}{2}}\Big)\Big(\underbrace{\frac{(2x)^2}{x^2}}_{\to 4}\Big)\right) = e^{-2}. \quad \square$$

iv) In generale per m, n interi positivi:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\sum_{k=0}^{m-1}x^k}{\cancel{(x-1)}\sum_{k=0}^{n-1}x^k} = \frac{\sum_{k=0}^{m-1}1}{\sum_{k=0}^{n-1}1} = \frac{m}{n}. \quad \square$$

v) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3}} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\cancel{(x^{1/3}+3^{1/3})}(x^{2/3} - x^{1/3}\cdot 3^{1/3} + 3^{2/3})}{\cancel{(x^{1/3}+3^{1/3})}}$

$= 3^{2/3} + 3^{2/3} + 3^{2/3} = 3\cdot 3^{2/3} = 3^{5/3}.$ $\square$

vi) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3}}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3}} \cdot \dfrac{\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{7x-3}} \cdot \dfrac{\sqrt{5-x}+\sqrt{7x-3}}{\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1}}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+8-8x-1}{5-x-7x+3} \cdot \dfrac{\sqrt{5-x}+\sqrt{7x-3}}{\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1}}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{7\cancel{(1-x)}}{8\cancel{(1-x)}} \cdot \dfrac{\sqrt{5-x}+\sqrt{7x-3}}{\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1}} = \dfrac{7}{8}\cdot\dfrac{\cancel{2}\cdot 2}{\cancel{2}\cdot 3} = \dfrac{7}{12}.$

$\square$

2. Determinare i punti di accumulazione degli insiemi

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1-\cos(2\pi/x)}{x^2-3x+2} \leq 0 \right\} \ , \ B = \left\{ \sin\left(\frac{(n^2-1)\pi}{2}\right) + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}^+ \right\}.$$

Svolgimento: Numeratore:

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \quad 1-\cos\left(\frac{2\pi}{x}\right) \leq 0$$

$$\text{e } \cos\left(\frac{2\pi}{x}\right) = 1 \iff \frac{2\pi}{x} = 2k\pi \text{ per } k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff x = \frac{1}{k} \text{ per } k \in \mathbb{Z}^*.$$

Denominatore:

$$x^2-3x+2 = (x-1)(x-2) = \begin{cases} <0 & \text{se } x \in (1,2) \\ >0 & \text{se } x \in [1,2]^c \end{cases}$$

Quindi $A = (1,2) \cup \left\{ \frac{1}{k} : k \in \mathbb{Z}\setminus\{0,1\} \right\}$

$$\mathcal{D}(A) = [1,2] \cup \mathcal{D}\left(\left\{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{Z}\setminus\{0,1\}\right\}\right) = [1,2] \cup \{0\}. \quad \square$$

2) Se $n \in \mathbb{N}^+$ allora

$$n \text{ pari} = 2k \implies \frac{n^2-1}{2} = \frac{4k^2-1}{2} = 2k^2 - \frac{1}{2}$$

$$\implies \sin\left(\frac{n^2-1}{2}\pi\right) = \sin\left(\left(2k^2-\frac{1}{2}\right)\pi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

$$n \text{ dispari} = 2k+1 \implies \frac{n^2-1}{2} = \frac{4k^2+4k}{2} = 2k^2+2k$$

$$\implies \sin\left(\frac{n^2-1}{2}\pi\right) = \sin\left((2k^2+2k)\pi\right) = \sin(0) = 0.$$

Quindi $B = \left\{ -1 + \frac{1}{2k} : k \in \mathbb{N}^+ \right\} \cup \left\{ -\frac{1}{2k+1} : k \in \mathbb{N} \right\}.$

E facile vedere che $-1, 0 \in \mathcal{D}(B) \subseteq [-1,0]$.

$\mathcal{D}(B) = \{-1,0\}$ perché se $x_0 \in (0,1)$ allora

$$\left| I\Big(x_0, \underbrace{\frac{\min(x_0, 1-x_0)}{2}}_{>0}\Big) \cap B \right| < +\infty. \quad \square$$

3. Sia $\mathcal{D}(X)$ l'insieme dei punti di accumulazione di un insieme X.
Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni.

i) Per ogni $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(A \cap B) = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$.

ii) Per ogni $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(A \cup B) = \mathcal{D}(A) \cup \mathcal{D}(B)$.

Svolgimento:

i) FALSO. Ad esempio se

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \; , \; n \geq 1 \right\} \quad e \quad B = \left\{ -\frac{1}{n} \; , \; n \geq 1 \right\}$$

allora $A \cap B = \emptyset$ e $\mathcal{D}(A \cap B) = \emptyset$. Mentre

$\mathcal{D}(A) = \{0\} = \mathcal{D}(B)$ e così $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) = \{0\}$.

$\square$

ii) VERO. Basta osservare che $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

$$I(x_0, r) \cap (A \cup B) \setminus \{x_0\} =$$
$$\Big((I(x_0, r) \cap A) \setminus \{x_0\} \Big) \cup \Big((I(x_0, r) \cap B) \setminus \{x_0\} \Big) \qquad (*)$$

Quindi $x_0 \in \mathcal{D}(A \cup B)$ se e solo se

$$I(x_0, r) \cap (A \cup B) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$$

se e solo se (per $(*)$)

$(I(x_0, r) \cap A) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$ oppure $(I(x_0, r) \cap B) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

se e solo se $x_0 \in \mathcal{D}(A) \cup \mathcal{D}(B)$.

$\square$

4. Rispondere alle seguenti domande.

i) Esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che

$$f(x) = \begin{cases} 4\arctan(x)\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) + \frac{\sin(\pi x)}{x - x^2} & \text{se } x \in (0,1), \\ \frac{ax+b}{x+c} & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus (0,1). \end{cases}$$

è continua in $\mathbb{R}$?

ii) Per quali $a \in \mathbb{R}^+$, $g(x) = (ax - \lfloor x \rfloor)(ax + \lfloor -x \rfloor)$ è continua in $\mathbb{R}$?

Svolgimento: i) La funzione f è continua se e solo se è continua in 0 e 1 e $c \in (-1,0)$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(4\underbrace{\operatorname{arctg}(x)}_{\to 0}\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}_{\text{limitata}} + \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x - x^2}\right)$$

$$= 0 + \lim_{x\to 0^+}\underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen}\pi x}{\pi x}\right)}_{\to 1}\underbrace{\left(\frac{\pi}{1-x}\right)}_{\to \pi} = \pi$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{ax+b}{x+c} = \frac{b}{c}$$

Quindi si deve verificare che $\frac{b}{c} = \pi$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(4\underbrace{\operatorname{arctg}(x)}_{\to \frac{\pi}{4}}\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}_{\to -1} + \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x - x^2}\right)$$

$$= -\pi + \lim_{x\to 1^-}\underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen}(\pi(x-1))}{\pi(x-1)}\right)}_{\to 1}\cdot\underbrace{\left(\frac{\pi}{x}\right)}_{\to \pi} = -\pi + \pi = 0$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{ax+b}{x+c} = \frac{a+b}{1+c}$$

Quindi si deve verificare che $\frac{a+b}{1+c} = 0$.

Così una possibile scelta è $c = -\frac{1}{2}$ e $b = -a = -\frac{\pi}{2}$.

$\square$

ii) Dimostriamo che g è continua se e solo se $a=1$. Infatti

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} (ax - \underbrace{\lfloor x \rfloor}_{=1})(ax + \underbrace{\lfloor -x \rfloor}_{=-2})$$

$$= (a-1)(a-2).$$

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} (ax - \underbrace{\lfloor x \rfloor}_{=0})(ax + \underbrace{\lfloor -x \rfloor}_{=-1})$$

$$= a\cdot(a-1)$$

e inoltre $g(1) = (a-1)^2$.

Affinché g sia continua in 1:

$$(a-1)(a-2) = a(a-1) = (a-1)^2$$

e questo accade se e solo se $a=1$.

Ora per $a=1$, $g(x) = (x - \lfloor x \rfloor)(x + \lfloor -x \rfloor)$ è periodica di periodo 1:

$$g(x+1) = (x+1-\lfloor x+1 \rfloor)(x+1+\lfloor -x-1 \rfloor)$$

$$= (x+\cancel{1}-\lfloor x \rfloor-\cancel{1})(x+\cancel{1}+\lfloor -x \rfloor-\cancel{1}) = g(x).$$

Dato che $g(x) = x(x-1)$ per $x\in[0,1]$ e $g(n)=0$ per $n\in\mathbb{Z}$ se ne deduce che g è continua in $\mathbb{R}$. $\square$

5. Siano f e g due funzioni continue in $\mathbb{R}$ e sia

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ g(x) & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Dimostrare che h è continua in $x_0 \in \mathbb{R}$ se e solo se $f(x_0) = g(x_0)$.

Svolgimento: Per la continuità di f e g in x_0, per $\varepsilon > 0$

$$\exists \delta_1 > 0 : \quad \forall x \in I(x_0, \delta_1), \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

$$\exists \delta_2 > 0 : \quad \forall x \in I(x_0, \delta_2), \quad |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

1) Se $f(x_0) = g(x_0)$, allora per $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$

$$\forall x \in I(x_0, \delta), \quad |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$$

perché $h(x) = f(x)$ o $h(x) = g(x)$ e $h(x_0) = f(x_0) = g(x_0)$.

2) Se $f(x_0) \neq g(x_0)$, sia $\varepsilon = \frac{1}{2}|f(x_0) - g(x_0)| > 0$

allora $\forall \delta > 0$, per la densità di $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$,

$$\exists x_1 \in I(x_0, \delta) \cap \mathbb{Q}, \quad \exists x_2 \in I(x_0, \delta) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

così se $x_0 \in \mathbb{Q}$

$$|h(x_2) - h(x_0)| = |g(x_2) - f(x_0)| \geq |g(x_0) - f(x_0)| - |g(x_2) - g(x_0)|$$
$$> 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$$

mentre se $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$|h(x_1) - h(x_0)| = |f(x_1) - g(x_0)| \geq |f(x_0) - g(x_0)| - |f(x_1) - f(x_0)|$$
$$> 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon.$$

$\square$