

Tutorato di Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

31 ottobre 2014

1. Calcolare i seguenti limiti

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(\cos(x/2))^2}{(\pi - x)^2}, & \text{ii)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^3}, & \text{iii)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(2x))^{1/x^2}, \\ \text{iv)} \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^7 - 1}, & \text{v)} \quad & \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 3}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3}}, & \text{vi)} \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - \sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x} - \sqrt{7x-3}}. \end{aligned}$$

2. Determinare i punti di accumulazione degli insiemi

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1 - \cos(2\pi/x)}{x^2 - 3x + 2} \leq 0 \right\}, \quad B = \left\{ \sin\left(\frac{(n^2 - 1)\pi}{2}\right) + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}^+ \right\}.$$

3. Sia $\mathcal{D}(X)$ l'insieme dei punti di accumulazione di un insieme X . Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni.

i) Per ogni $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(A \cap B) = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$.

ii) Per ogni $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(A \cup B) = \mathcal{D}(A) \cup \mathcal{D}(B)$.

4. Rispondere alle seguenti domande.

i) Esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che

$$f(x) = \begin{cases} 4 \arctan(x) \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) + \frac{\sin(\pi x)}{x - x^2} & \text{se } x \in (0, 1), \\ \frac{ax + b}{x + c} & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus (0, 1). \end{cases}$$

è continua in \mathbb{R} ?

ii) Per quali $a \in \mathbb{R}^+$, $g(x) = (ax - [x])(ax + [-x])$ è continua in \mathbb{R} ?

5. Siano f e g due funzioni continue in \mathbb{R} e sia

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ g(x) & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Dimostrare che h è continua in $x_0 \in \mathbb{R}$ se e solo se $f(x_0) = g(x_0)$.