1. Determinare l'insieme di definizione di ciascuna delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \log_{10}(\sqrt{x-2}) \,, \quad g(x) = \log_2(|\log_2(|\tan x|)|) \,, \quad h(x) = \arcsin\left(\frac{1}{|x|-2}\right) .$$

Svolgimento:

1) $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ \sqrt{x-2} > 0 \end{cases} \iff \{ x-2 > 0$

Quindi $D_f = (2, +\infty)$. □

2) $\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z} \,, \\ |tg\, x| > 0 \,, \\ |\log_2 |tg\, x|| > 0 \,. \end{cases}$

Ora

$|tg\, x| > 0 \iff tg\, x \neq 0 \iff x \neq k'\pi \quad \forall k' \in \mathbb{Z}$.

e

$|\log_2 |tg\, x|| > 0 \iff \log_2 |tg\, x| \neq 0 \iff |tg\, x| \neq 1$

$\iff tg\, x \neq \pm 1 \iff \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + k''\pi \quad \forall k'' \in \mathbb{Z} \,, \\ x \neq \frac{3\pi}{4} + k'''\pi \quad \forall k''' \in \mathbb{Z} \,. \end{cases}$

Quindi $D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{4} : k \in \mathbb{Z} \right\}$. □

3) $\begin{cases} |x| - 2 \neq 0 \\ \left| \frac{1}{|x|-2} \right| \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} |x| \neq 2 \\ 1 \leq ||x|-2| \end{cases}$

$\iff \{ 1 \leq |x| - 2 \quad \vee \quad \{ |x| - 2 \leq -1$

$\iff \{ 3 \leq |x| \quad \vee \quad \{ |x| \leq 1$

Quindi $D_h = (-\infty, -3] \cup [-1, 1] \cup [3, +\infty)$. □

2. Disegnare i grafici delle seguenti funzioni nell'intervallo $[0,2]$,

$$f(x) = \min(\{x\}, \{-x\}) \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{\arccos(\cos(2\pi x))}{2\pi},$$

dove $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ è la *parte frazionaria* di x e $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$ è la *parte intera* di x.

Svolgimento: Intanto osserviamo che sia f che g sono funzioni periodiche di periodo $T=1$:

$$f(x+1) = \min(\{x+1\}, \{-x-1\}) = \min(\{x\}, \{-x\}) = f(x),$$

$$g(x+1) = \frac{\arccos(\cos(2\pi x + 2\pi))}{2\pi} = \frac{\arccos(\cos 2\pi x)}{2\pi} = g(x).$$

Inoltre sia f che g sono funzioni pari:

$$f(-x) = \min(\{-x\}, \{x\}) = f(x)$$

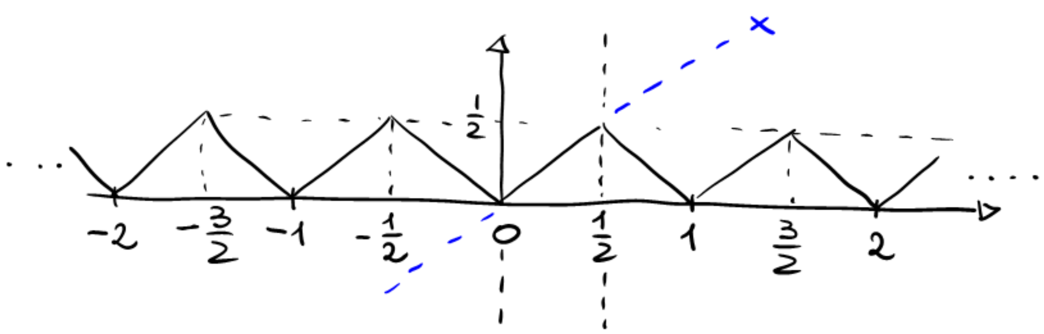
$$g(-x) = \frac{\arccos(\cos(-2\pi x))}{2\pi} = g(x).$$

Quindi per determinare il grafico di f e g basta considerare cosa accade in $[0, \frac{1}{2}]$ (metà di un intervallo di lunghezza 1 simmetrico rispetto a 0).

$$\forall x \in [0, \tfrac{1}{2}], \quad f(x) = \min(\{x\}, \{-x\}) = \min(x, -x+1) = x$$

$$g(x) = \frac{\arccos(\cos 2\pi x)}{2\pi} = \frac{\cancel{2\pi} x}{\cancel{2\pi}} = x$$

Quindi f e g coincidono in $[0, \frac{1}{2}]$ e dunque coincidono in $\mathbb{R}$. Così il grafico è



$\square$

3. Rispondere alle seguenti domande.

i) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il grafico del polinomio $P(x) = x^4+x^3+ax+1$ ha un asse di simmetria parallelo all'asse y?

ii) Esiste una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non costante il cui grafico ha almeno due assi di simmetria paralleli all'asse y?

iii) Esiste un polinomio non costante il cui grafico ha almeno due assi di simmetria paralleli all'asse y?

Svolgimento: i) Il grafico di P ha un asse di simmetria in $x=b$ se e solo se

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(b+x) = P(b-x).$$

Allora

$$P(b+x) = b^4 + 4b^3x + 6b^2x^2 + 4bx^3 + x^4 + b^3 + 3b^2x + 3bx^2 + x^3 + ab + ax + 1$$

$$P(b-x) = b^4 - 4b^3x + 6b^2x^2 - 4bx^3 + x^4 + b^3 - 3b^2x + 3bx^2 - x^3 + ab - ax + 1$$

e

$$P(b+x) - P(b-x) = 2(4b^3x + 4bx^3 + 3b^2x + x^3 + ax)$$

$$= 2x\left((4b+1)x^2 + (4b^3+3b^2+a)\right) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

se e solo se

$$\begin{cases} 4b+1=0 \\ 4b^3+3b^2+a=0 \end{cases} \iff \begin{cases} b=-1/4 \\ a=-4b^3-3b^2=-\frac{1}{8}. \end{cases}$$

Quindi il grafico di P ha un asse di simmetria solo per $a=-1/8$. $\square$

ii) SI. Ad esempio la funzione $f(x)=\cos x$ ha infiniti assi di simmetria:

$$x = k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Infatti per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha che

$$f(k\pi + x) = \cos(k\pi + x) = (-1)^k \cos(x)$$
$$= (-1)^k \cos(-x) = \cos(k\pi - x) = f(k\pi - x).$$

$\square$

iii) NO. Se una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ha almeno due assi di simmetria

$$x = b \quad \text{e} \quad x = a \quad \text{con } b > a$$

allora f è periodica di periodo $T = 2(b-a) > 0$:

$$f(x+T) = f(x + 2(b-a))$$

$$= f(b + (b - 2a + x)) \overset{\substack{\text{simmetria}\\ x=b}}{=} f(b - (b - 2a + x)) = f(2a - x)$$

$$= f(a + (a-x)) \overset{\substack{\text{simmetria}\\ x=a}}{=} f(a - (a-x)) = f(x).$$

Quindi f assume il valore $f(0)$ in infiniti punti (ogni kT con $k \in \mathbb{Z}$) mentre un polinomio non costante assume un certo valore al più in d punti dove d è il grado del polinomio.

$\square$

4. Trovare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ dicendo se sono massimi o minimi:

$$A = \{|n^2 - 5| : n \in \mathbb{Z}\}, \qquad B = \left\{x + \frac{2}{x} : x \in \mathbb{Q}^+\right\},$$
$$C = \left\{\frac{x+1}{x-2} : x \in (2, +\infty)\right\}, \quad D = \{\sin(x) + \cos(x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Svolgimento: 1.1) $\inf(A) = \min(A) = 1$.

Se $|n| \geq 3$ allora $n^2 \geq 9$ e $|n^2-5| = n^2-5 \geq 4$.

Se $|n| \leq 2$ allora $n = 0, 1, -1, 2, -2$ e $|n^2-5|$ vale rispettivamente $5, 4, 4, 1, 1$.

1.2) $\sup(A) = +\infty$ (no max).

Devo verificare che $\forall r > 0 \; \exists n \in \mathbb{Z} : |n^2-5| > r$.

Basta prendere $n > r+5$ così

$$|n^2-5| \geq n^2-5 \geq n-5 > r. \qquad \square$$

2.1) $\inf(B) = 2\sqrt{2}$ (no min).

Per la disuguaglianza AM-GM

$$x + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{2}{x}} = 2\sqrt{2}.$$

L'uguaglianza non può valere perché altrimenti

$$x = \frac{2}{x} \iff x^2 = 2 \iff x = \sqrt{2} \text{ mentre } x \in \mathbb{Q}^+.$$

Quindi bisogna ancora far vedere che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \mathbb{Q}^+ : x + \frac{2}{x} < 2\sqrt{2} + \varepsilon$$

ossia che $x^2 - (2\sqrt{2}+\varepsilon)x + 2 = (x - r_+)(x - r_-) < 0$

dove $r_\pm = \sqrt{2} + \frac{\varepsilon}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ e $\Delta = \varepsilon^2 + 4\sqrt{2}\varepsilon > 0$.

Così x esiste perché $(r_-, r_+) \cap \mathbb{Q}^+ \neq \emptyset$.

2.2) $\sup(B) = +\infty$ (no max).

Sia $r > 0$ allora se $x = \lfloor r \rfloor + 1 \in \mathbb{Q}^+$

$$B \ni x + \frac{2}{x} > x > r.$$

$\square$

3.1) $\inf(C) = 1$ (no min).

Per $x > 2$, $\dfrac{x+1}{x-2} = 1 + \dfrac{3}{x-2} > 1$ (non vale $=$).

Per $\varepsilon > 0$ esiste $x > 2$ tale che

$$1 + \varepsilon > \frac{x+1}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2} \ ?$$

sì. Basta prendere $x > 2 + \dfrac{3}{\varepsilon}$.

3.2) $\sup(C) = +\infty$ (no max).

Per $r > 0$ esiste $x > 2$ tale che

$$\frac{x+1}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2} > \frac{3}{x-2} > r \ ?$$

sì. Basta prendere $2 < x < 2 + \dfrac{3}{r}$.

$\square$

4) $\inf(D) = \min(D) = -\sqrt{2}$ e $\sup(D) = \max(D) = \sqrt{2}$.

Basta osservare che

$$\operatorname{sen}(x) + \cos(x) = \sqrt{2}\, \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

e quindi $\forall x \in \mathbb{R}$, $-\sqrt{2} \leq \operatorname{sen}(x) + \cos(x) \leq \sqrt{2}$

Inoltre $\operatorname{sen}(x) + \cos(x) = \pm\sqrt{2}$ rispettivamente per $x = \dfrac{\pi}{4}$ e $x = \dfrac{5\pi}{4}$.

$\square$

5. Rispondere alle seguenti domande.

i) Esiste una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ con $b - a > 1$, $\inf\{f(x) : x \in [a, b]\} = -\infty$ e $\sup\{f(x) : x \in [a, b]\} = +\infty$?

ii) Esiste una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ con $b - a > 0$, $\inf\{g(x) : x \in [a, b]\} = -\infty$ e $\sup\{g(x) : x \in [a, b]\} = +\infty$?

Svolgimento: i) SI. Ad esempio

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}(\pi x) & \text{se } x \neq \frac{1}{2} + k \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

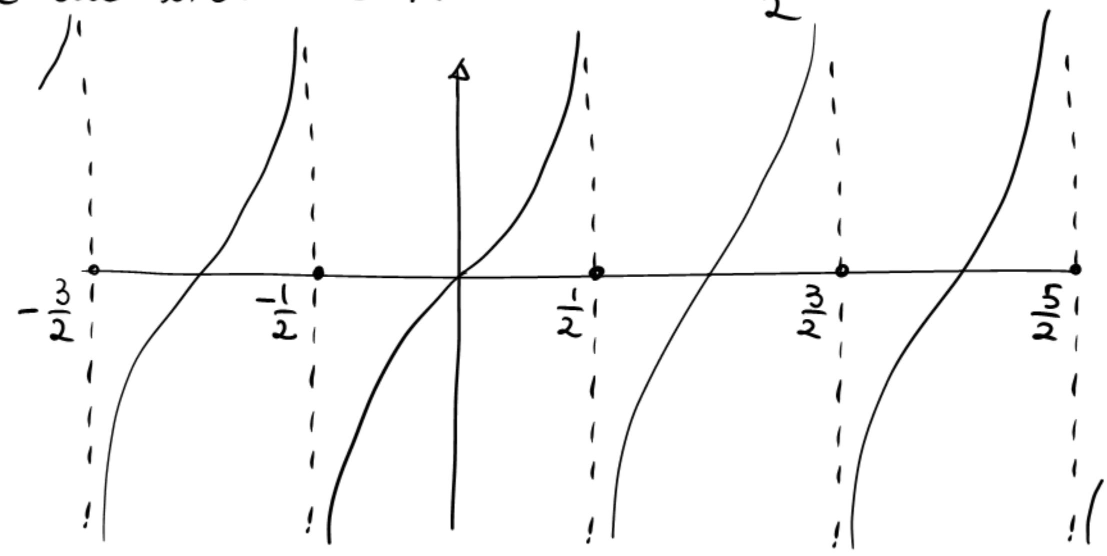
Infatti se $b - a > 1$ allora $\exists\, k \in \mathbb{Z} : \frac{1}{2} + k \in (a, b)$ e

$$\inf\{f(x) : x \in [a, b]\} = -\infty$$

perché $\operatorname{tg}(\pi x)$ non è limitata inferiormente in un intorno destro di $\frac{1}{2} + k$ e

$$\sup\{f(x) : x \in [a, b]\} = +\infty$$

perché $\operatorname{tg}(\pi x)$ non è limitata superiormente in un intorno sinistro di $\frac{1}{2} + k$.



$\square$

ii) SI. Ad esempio

$$g(x)=\begin{cases} 2^n\cdot(-1)^m & \text{se } x=\dfrac{2m+1}{2^n} \text{ con } m\in\mathbb{Z} \text{ e } n\in\mathbb{N} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dobbiamo dimostrare che per ogni $r>0$

$\exists x_1,x_2\in[a,b]: \quad g(x_1)>r \quad e \quad g(x_2)<-r.$

Dato che $b-a>0$

$$\exists n\in\mathbb{N}: \; 2^n>r \quad e \quad 2^n>\frac{4}{b-a}.$$

Quindi l'intervallo $[2^n\cdot a, 2^n\cdot b]$ contiene almeno due numeri interi dispari consecutivi $2m+1$ e $2m+3$ con $m\in\mathbb{Z}$ perché la sua ampiezza è maggiore di 4.

Quindi $\quad 2^n\cdot a \leq 2m+1 < 2m+3 \leq 2^n\cdot b$

ossia $\quad a\leq \dfrac{2m+1}{2^n} < \dfrac{2m+3}{2^n} \leq b$

e $\quad g\left(\dfrac{2m+1}{2^n}\right)=2^n\cdot(-1)^m$

$$g\left(\frac{2m+3}{2^n}\right)=g\left(\frac{2(m+1)+1}{2^n}\right)=2^n\cdot(-1)^{m+1}.$$

Così basta porre $x_1=\dfrac{2m+1}{2^n}$ e $x_2=\dfrac{2m+3}{2^n}$ se m è pari e $x_1=\dfrac{2m+3}{2^n}$ e $x_2=\dfrac{2m+1}{2^n}$ se m è dispari.

$\square$