1. Determinare la parte reale, la parte immaginaria e il modulo dei seguenti numeri complessi:

$$z_1 = \frac{2+3i}{(1-2i)^2}, \qquad z_2 = \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{1+i}\right)^{15}, \qquad z_3 = \frac{(1-\sqrt{3}i)^{28}}{(1-i)^{50}}.$$

Svolgimento:

Calcolo per z_1. $(1-2i)^2 = 1-4-4i = -3-4i$

$$z_1 = \frac{2+3i}{-3-4i} \cdot \frac{-3+4i}{-3+4i} = \frac{1}{9+16} \cdot (-6-9i+8i-12) = -\frac{18}{25} - \frac{i}{25}$$

Quindi $Re(z_1) = -\frac{18}{25}$, $Im(z_1) = -\frac{1}{25}$ e

$$|z_1| = \frac{1}{25} \cdot \sqrt{(-18)^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{325}}{25} = \frac{\sqrt{13}}{5}.$$

Calcolo per z_2.

$$\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = \frac{\cancel{i}+1-\cancel{i}}{i(i+1)} = \frac{1}{-1+i} = -\frac{1}{2}(1+i) = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Quindi

$$z_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{15} = -\frac{1}{2^{15/2}} e^{i\frac{15\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{256} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{-1+i}{256}$$

Così $|z_2| = \frac{\sqrt{2}}{256}$ e $Re(z_2) = -\frac{1}{256}$, $Im(z_2) = \frac{1}{256}$.

Calcolo per z_3. $1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$, $1 - i = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}$.

$$z_3 = \frac{2^{28} e^{-i\frac{28\pi}{3}}}{2^{\frac{50}{2}} e^{-i\frac{50\pi}{4}}} = \frac{2^3 e^{-i(10\pi - \frac{2\pi}{3})}}{e^{-i(12\pi + \frac{\pi}{2})}} = 8e^{i(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2})} = 8e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

Così $|z_3| = 8$ e

$$Re(z_3) = 8\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -4\sqrt{3}, \quad Im(z_3) = 8\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -4.$$

$\square$

2. Calcolare

i) l'area del poligono di vertici $\{z \in \mathbb{C} \;:\; (z^4 - 81)(z^4 + 64) = 0\}$;

ii) il perimetro del poligono di vertici $\left\{z \in \mathbb{C} \;:\; z^6 = \dfrac{1}{(3-2i)^6}\right\}$.

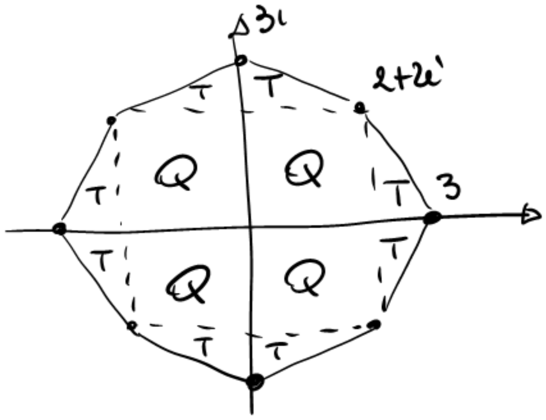
Svolgimento: i) I vertici del poligono sono le soluzioni in $\mathbb{C}$ di $z^4 = 81 \vee z^4 = -64$.

$$z^4 = 81 = 3^4 \cdot e^{i0} \Rightarrow z_k = 3 \cdot e^{i\left(0 + \frac{2k\pi}{4}\right)}, \quad k = 0,1,2,3$$

da cui $\{z \in \mathbb{C} : z^4 = 81\} = \{3, 3i, -3, -3i\}$.

$$z^4 = -64 = (2\sqrt{2})^4 e^{i\pi} \Rightarrow z_k = 2\sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right)}, \quad k = 0,1,2,3$$

da cui $\{z \in \mathbb{C} : z^4 = -64\} = \{2+2i, 2-2i, -2+2i, -2-2i\}$.



Quindi l'area è data da

$$4 \cdot Q + 8T = 4 \cdot 4 + 8 \cdot 1 = 24.$$

$\square$

ii) L'equazione $z^6 = \dfrac{1}{(3-2i)^6}$ ha 6 soluzioni distinte che corrispondono ai vertici di un esagono regolare centrato in O. Per calcolare il perimetro di tale esagono basta conoscere il raggio R della circonferenza circoscritta ossia il modulo delle soluzioni:

$$p = 6R = 6\left|\frac{1}{(3-2i)^6}\right|^{1/6} = \frac{6}{|3-2i|} = \frac{6}{\sqrt{9+4}} = \frac{6}{\sqrt{13}}. \quad \square$$

3. Sia $n \in \mathbb{N}^+$ e sia $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

i) Dimostrare che $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z}$.

ii) Dimostrare che se $|z| < 1$ allora $|z^n - 1| \leq \dfrac{|z-1|}{1-|z|}$.

Svolgimento:

i) Per induzione:

$$P(1): \quad \sum_{k=0}^{1-1} z^k = z^0 = 1 = \frac{1-z}{1-z} \quad \text{vero.}$$

$\forall n \geq 1$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$:

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \sum_{k=0}^{n-1} z^k + z^n \overset{P(n)}{=} \frac{1-z^n}{1-z} + z^n = \frac{1-\cancel{z^n}+\cancel{z^n}-z^{n+1}}{1-z}.$$

$\square$

ii) Per $|z|<1$ si ha che

$$|z^n - 1| \overset{i)}{=} \left|(z-1)\sum_{k=0}^{n-1} z^k\right| = |z-1| \cdot \left|\sum_{k=0}^{n-1} z^k\right|$$

$$\underset{\text{dis triangolare}}{\leq} |z-1| \sum_{k=0}^{n-1} |z|^k \underset{\substack{i) \text{ e} \\ |z| \neq 1}}{=} |z-1| \frac{1-|z|^n}{1-|z|} \underset{0 \leq |z| < 1}{\leq} \frac{|z-1|}{1-|z|}.$$

$\square$

4. Sia $f(z) = \dfrac{2z - i}{2 + iz}$ e sia $D = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq 1\}$.

i) Dimostrare che f è una funzione biunivoca da D in D e determinare la funzione inversa f^{-1}.

ii) Determinare per ogni $t \in [0, 1]$ la cardinalità dell'insieme

$$\{z \in D \ : \ f(z) = tz\}.$$

Svolgimento: i) Intanto dimostriamo che $f(D) \subseteq D$, ossia che se $|z| \leq 1$ allora $|f(z)| = \dfrac{|2z-i|}{|2+iz|} \leq 1$.

Ora
$$|2z-i|^2 = (2z-i)\overline{(2z-i)} = (2z-i)(2\bar{z}+i)$$
$$= 4|z|^2 - 2i\bar{z} + 2iz + 1$$
$$= 4|z|^2 + 4\,\mathrm{Re}(iz) + 1,$$
$$|2+iz|^2 = (2+iz)\overline{(2+iz)} = (2+iz)(2-i\bar{z})$$
$$= 4 + 2iz - 2i\bar{z} + |z|^2.$$
$$= 4 + 4\,\mathrm{Re}(iz) + |z|^2.$$

Così
$$4|z|^2 + \cancel{4\mathrm{Re}(iz)} + 1 \overset{?}{\leq} 4 + \cancel{4\mathrm{Re}(iz)} + |z|^2$$
$$0 \overset{?}{\leq} 3(1 - |z|^2) \quad \text{vera.}$$

Ora per far vedere che f è biunivoca mostriamo che $\forall\, w \in D$, l'equazione $f(z) = w$ ha un'unica soluzione $z \in D$.

$$\frac{2z-i}{2+iz} = w \quad \overset{z \neq -2i}{\Longleftrightarrow} \quad 2z - i = 2w + izw$$
$$z = \frac{2w+i}{2-iw} = -f(-w) \in D$$

Così abbiamo anche che $f^{-1}(w) = \dfrac{2w+i}{2-iw}$. $\square$

ii) Sia $t \in [0,1]$ e consideriamo l'equazione

$$f(z) = \frac{2z-i}{2+iz} = tz \qquad \text{per } z \in D.$$

Quindi $\quad 2z - i = 2tz + tiz^2$, ossia

$$tiz^2 + 2(t-1)z + i = 0 .$$

Se $t=0$ allora $-2z+i=0 \Rightarrow z = \frac{i}{2} \in D$.

Se $t \in (0,1]$ allora le soluzioni sono

$$z_{1,2} = \frac{1-t \pm \sqrt{(t-1)^2+t}}{ti}$$
$$= \frac{-i}{t}\left(1-t \pm \sqrt{\underbrace{t^2-t+1}_{>0}}\right).$$

Se $t=1$ allora $z_1 = -i \in D$, $z_2 = +i \in D$.

Se $0<t<1$ allora

$$z_1 = \frac{-i}{t}\left(1-t-\sqrt{t^2-t+1}\right) \in D$$

Infatti

$$|z_1| = \frac{1}{t}\left(t-1+\sqrt{t^2-t+1}\right) \overset{?}{\leq} 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t^2-t+1} \overset{?}{\leq} 1 \Leftrightarrow t(1-t) \overset{?}{\leq} 0 \quad \text{ok}$$

Mentre $\quad z_2 = -\frac{i}{t}\left(1-t+\sqrt{t^2-t+1}\right) \notin D$

perchè $z_1 \cdot z_2 = \frac{\cancel{i}}{\cancel{i}t}$ e $\underbrace{|z_1|}_{\leq 1} \cdot |z_2| = \frac{1}{t} > 1 \Rightarrow |z_2| > 1$.

Dunque per $t \in [0,1]$ l'equazione $f(z) = tz$ ha una sola soluzione in D per $t \in [0,1)$ e ha due soluzioni in D se $t=1$.

$\square$

5. Siano u, v, w tre numeri complessi distinti.

i) Dimostrare che se u, v, w sono i vertici di un triangolo isoscele con un angolo retto nel vertice v allora

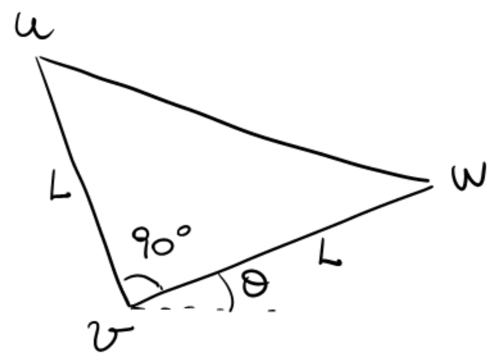
$$(u-v)^2 + (v-w)^2 = 0.$$

ii) Dimostrare che se u, v, w sono i vertici di un triangolo equilatero allora

$$(u-v)^2 + (v-w)^2 + (w-u)^2 = 0.$$

Svolgimento: Sia per i) che ii) possiamo supporre che il triangolo uvw sia orientato in senso antiorario (altrimenti scambiamo u e w).

i)



con
$|w-v| = |u-v| = L \neq 0$

Allora
$$\begin{cases} w = v + (w-v) = v + L e^{i\theta} \\ u = v + (u-v) = v + L e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}. \end{cases}$$

così

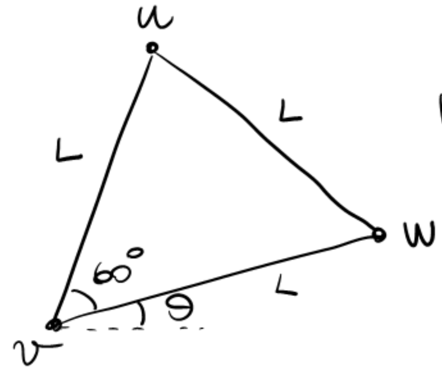
$$(u-v)^2 + (v-w)^2 = \left(L e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}\right)^2 + \left(L e^{i\theta}\right)^2$$

$$= L^2 e^{i2\theta + i\pi} + L^2 e^{i2\theta}$$

$$= L^2 e^{i2\theta}\big(\underbrace{e^{i\pi}}_{-1} + 1\big) = 0.$$

$\square$

ii)



Con

$$|u-v| = |v-w| = |w-u| = L \neq 0.$$

Allora

$$\begin{cases} w = v + (w-v) = v + L e^{i\theta} \\ u = v + (u-v) = v + L e^{i(\theta + \pi/3)} \end{cases}.$$

Così

$$(u-v)^2 + (v-w)^2 + (w-u)^2 =$$

$$= \left(L e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)}\right)^2 + \left(L e^{i\theta}\right)^2 + \left(L e^{i\theta} - L e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)}\right)^2$$

$$= L^2 e^{i2\theta} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} + L^2 e^{2i\theta} + L^2 e^{i2\theta} + L^2 e^{2i\theta} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} - 2L^2 e^{2i\theta} e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$= 2L^2 e^{i2\theta}\left(e^{i\frac{2\pi}{3}} + 1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$$

$$= 2L^2 e^{i2\theta}\Big(\underbrace{\cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)}_{-1/2} + i\underbrace{\operatorname{sen}\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)}_{\sqrt{3}/2} + 1 - \underbrace{\cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)}_{1/2} - i\underbrace{\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{3}\right)}_{\sqrt{3}/2}\Big)$$

$$= 2L^2 e^{i2\theta}\left(-\cancel{\tfrac{1}{2}} + \cancel{i\tfrac{\sqrt{3}}{2}} + \cancel{1} - \cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{i\tfrac{\sqrt{3}}{2}}\right) = 0.$$

$\square$