

# Tutorato di Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

17 ottobre 2014

1. Determinare la parte reale, la parte immaginaria e il modulo dei seguenti numeri complessi:

$$z_1 = \frac{2 + 3i}{(1 - 2i)^2}, \quad z_2 = \left( \frac{1}{i} - \frac{1}{1 + i} \right)^{15}, \quad z_3 = \frac{(1 - \sqrt{3}i)^{28}}{(1 - i)^{50}}.$$

2. Calcolare

i) l'area del poligono di vertici  $\{z \in \mathbb{C} : (z^4 - 81)(z^4 + 64) = 0\}$ ;

ii) il perimetro del poligono di vertici  $\left\{ z \in \mathbb{C} : z^6 = \frac{1}{(3 - 2i)^6} \right\}$ .

3. Sia  $n \in \mathbb{N}^+$  e sia  $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ .

i) Dimostrare che  $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1 - z^n}{1 - z}$ .

ii) Dimostrare che se  $|z| < 1$  allora  $|z^n - 1| \leq \frac{|z - 1|}{1 - |z|}$ .

4. Sia  $f(z) = \frac{2z - i}{2 + iz}$  e sia  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ .

i) Dimostrare che  $f$  è una funzione biunivoca da  $D$  in  $D$  e determinare la funzione inversa  $f^{-1}$ .

ii) Determinare per ogni  $t \in [0, 1]$  la cardinalità dell'insieme

$$\{z \in D : f(z) = tz\}.$$

5. Siano  $u, v, w$  tre numeri complessi distinti.

i) Dimostrare che se  $u, v, w$  sono i vertici di un triangolo isoscele con un angolo retto nel vertice  $v$  allora

$$(u - v)^2 + (v - w)^2 = 0.$$

ii) Dimostrare che se  $u, v, w$  sono i vertici di un triangolo equilatero allora

$$(u - v)^2 + (v - w)^2 + (w - u)^2 = 0.$$