

Tutorato di Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

10 ottobre 2014

1. Dimostrare le seguenti proposizioni.

i) Per ogni intero $n \geq 2$,
$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) < \frac{2}{n^2}.$$

ii) Per ogni intero $n \geq 1$,
$$2 \left(\sqrt{n+1} - 1\right) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

iii) Siano $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e per ogni intero $n \geq 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Allora per ogni intero $n \geq 0$, $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$ dove $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ e $\beta = (1 - \sqrt{5})/2$.

2. Dimostrare le seguenti proposizioni.

i) Tra tutti i rettangoli inscritti in una circonferenza fissata, il quadrato è quello di area massima.

ii) Tra tutti i triangoli di area fissata, il triangolo equilatero è quello di perimetro minimo.

3. Dimostrare che l'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n, m) : n, m \in \mathbb{N}\}$ è numerabile. Riuscite a trovare una funzione biunivoca da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in \mathbb{N} in forma esplicita?

4. Determinare delle funzioni

i) $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, ii) $g : [0, 1) \rightarrow [0, 1]$, iii) $h : [1, 2] \rightarrow [0, 1] \cup [2, 3]$,

in modo che siano biunivoche:

5. La *parte intera* di un numero reale x , si indica con il simbolo $[x]$ e si definisce come il più grande intero minore o uguale a x :

$$[x] \stackrel{\text{def}}{=} \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}.$$

i) La funzione $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{N}$ data da $f(n) = [x^2 + x]$ è iniettiva? È surgettiva?

ii) La funzione $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ data da $g(n) = \left\lfloor n + \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right\rfloor$ è iniettiva?

Il numero 100 appartiene all'insieme $g(\mathbb{N})$?