1. Risolvere le seguenti disuguaglianze per $x \in \mathbb{R}$:

i) $\dfrac{x(x+1)^2}{(x^2-16)} \leq \dfrac{(x+1)^3}{(x^2+2x-24)}$

ii) $\sqrt{2-\sqrt{2+x}} \geq x$

iii) $8 \leq 16^{(\sin(x))^2} + 16^{(\cos(x))^2} \leq 17$

Svolgimento:

i) Procediamo per disuguaglianze equivalenti.

$$\frac{x(x+1)^2}{(x-4)(x+4)} - \frac{(x+1)^3}{(x-4)(x+6)} \leq 0 \quad \text{con } x \notin \{4,-4,-6\},$$

$$\frac{(x+1)^2\left(x(x+6)-(x+1)(x+4)\right)}{(x-4)(x+4)(x+6)} \leq 0,$$

$$\frac{(x+1)^2\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}(x+4)(x+6)} \leq 0 \qquad (x \neq 4)$$

Se $x=-1$ vale l'$=$. Se $x \neq -1$ allora $(x+1)^2 > 0$ e basta risolvere

$$\frac{1}{(x+4)(x+6)} \leq 0 \quad \text{che vale per } x \in (-6,-4).$$

Quindi l'insieme delle soluzioni è

$$(-6,-4) \cup \{-1\}.$$

$\square$

ii) La disuguaglianza è equivalente a

$$\begin{cases} 2+x \geq 0 \\ 2-\sqrt{2+x} \geq 0 \\ x<0 \end{cases} \cup \begin{cases} 2+x \geq 0 \\ 2-\sqrt{2+x} \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 2-\sqrt{2+x} \geq x^2 \end{cases}.$$

Risolviamo il primo sistema:

$$\begin{cases} -2 \leq x < 0 \\ 4 \geq 2+x \end{cases} \iff x \in [-2,0).$$

Risolviamo il secondo sistema:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 4 \geq 2+x \\ 2-x^2 \geq \sqrt{2+x} \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 2-x^2 \geq 0 \\ (2-x^2)^2 \geq 2+x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{2} \\ x^4-4x^2-x+2 \geq 0 \\ \quad \parallel \\ \underset{>0}{(x+1)}\underset{<0}{(x-2)}(x^2+x-1) \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{2} \\ x^2+x-1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\iff x \in [0,\sqrt{2}] \cap \left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right] = \left[0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right].$$

Quindi l'insieme delle soluzioni è

$$[-2,0) \cup \left[0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right] = \left[-2, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right].$$

$\square$

iii) Posto $t = (\operatorname{sen} x)^2$, è sufficiente dimostrare

che $\forall t \in [0,1]$, $8 \leq 16^t + 16^{1-t} \leq 17$.

Sia $z = 16^t$ allora basta verificare che

$$\forall z \in [1,16], \quad 8 \leq z + \frac{16}{z} \leq 17,$$

ossia ($z>0$)

$$\begin{cases} z^2 - 8z + 16 \geq 0 \\ z^2 - 17z + 16 \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (z-4)^2 \geq 0 \\ (z-1)(z-16) \leq 0 \end{cases}$$

$\iff z \in [1,16]$.

$\square$

2. Dimostrare le seguenti proposizioni.

i) Per ogni intero $n \geq 1$, $\quad 2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.

ii) Per ogni intero $n \geq 1$, $\quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} > 0$.

iii) Per ogni intero $n \geq 3$, $\quad n^{n+1} > (n+1)^n$.

Svolgimento:

i) Poniamo per $n \geqslant 1$

$P(n) =$ " $2^{n-1} \leqslant n!$ " e $Q(n) =$ " $n! \leqslant n^n$ "

e dimostriamo $P(n)$ e $Q(n)$ per induzione.

$P(1)$: $2^{1-1} = 2^0 = 1 \leqslant 1!$ vero.

Per $n \geqslant 1$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$:

$$2^n = 2 \cdot 2^{n-1} \overset{P(n)}{\leqslant} 2 \cdot n! \overset{2 \leqslant n+1}{\leqslant} (n+1) \cdot n! = (n+1)!$$

$Q(1)$: $1! = 1 \leqslant 1^1$ vero.

Per $n \geqslant 1$, $Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$:

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \overset{Q(n)}{\leqslant} (n+1) \cdot n^n \overset{n < n+1}{\leqslant} (n+1)(n+1)^n = (n+1)^{n+1}.$$

$\square$

ii) Poniamo per $n \geq 1$

$$P(n) = \text{"} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} > 0 \text{"}$$

e dimostriamo $P(n)$ per induzione (forte).

$P(1)$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{(-1)^2}{1} = 1 > 0$ ok.

$P(2)$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{(-1)^2}{1} + \frac{(-1)^3}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$ ok.

Per $n \geq 2$, $P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Se n è pari allora

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} \overset{P(n)}{>} 0 + \frac{1}{n+1} > 0.$$

Se n è dispari allora

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}$$

$$\overset{P(n-1)}{>} 0 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > 0.$$

$\square$

iii) Poniamo per $n \geq 3$

$$P(n) = \text{"} n^{n+1} > (n+1)^n \text{"}$$

e dimostriamo $P(n)$ per induzione.

$P(3)$: $3^{3+1} > (3+1)^3$, $3^4 > 4^3$, $81 > 64$ ok

$\forall n \geq 3$, $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$:

$$(n+1)^{n+2} \underset{P(n)}{>} (n+1)^{n+2} \cdot \underbrace{\left(\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}\right)}_{\in (0,1)} = \frac{(n+1)^{2n+2}}{n^{n+1}} \overset{?}{>} (n+2)^{n+1}.$$

La disuguaglianza che rimane è equivalente a

$$\left(\frac{(n+1)^2}{n}\right)^{n+1} \overset{?}{>} (n+2)^{n+1}.$$

e, siccome $x \to x^{n+1}$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}^+$, basta dimostrare che

$$\frac{(n+1)^2}{n} \overset{?}{>} n+2$$

osservo

$$n^2+2n+1 = (n+1)^2 \overset{?}{>} n(n+2) = n^2+2n$$

che è vera. $\square$

3. Dimostrare che i seguenti numeri sono irrazionali.

i) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

ii) $\log_2(3)$

iii) $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$, ...

Svolgimento:

i) Se per assurdo $\sqrt{2}+\sqrt{3} = q \in \mathbb{Q}$ allora elevando al quadrato otteniamo

$$2 + 2\sqrt{6} + 3 = q^2 \implies \sqrt{6} = \frac{q^2-5}{2} \in \mathbb{Q}$$

mentre è noto (dimostrato a lezione) che se $n \in \mathbb{N}$ allora $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ se e solo se n è un quadrato perfetto. Ma $6 = 2 \cdot 3$ non è un quadrato perfetto. Contraddizione.

$\square$

ii) Dato che $3 > 2$, $\log_2 3 > 1 > 0$.
Se fosse $\log_2 3 = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$ per qualche $m, n \in \mathbb{N}^+$ allora per definizione di logaritmo

$$2^{\frac{m}{n}} = 3 \quad \text{ossia} \quad 2^m = 3^n$$

Ma 2^m è un intero pari per $m \in \mathbb{N}^+$ mentre 3^n è un intero dispari per $n \in \mathbb{N}^+$.
Contraddizione.

$\square$

iii) I numeri $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, ...

sono gli elementi della seguente successione definita per ricorrenza:

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad \forall n \geq 1 \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

Quindi dimostriamo che $\forall n \geq 1$, $a_n \notin \mathbb{Q}$.

Ragioniamo per induzione:

$P(1)$: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ vero (dimostrato a lezione).

$\forall n \geq 1$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Se per assurdo $a_{n+1} \in \mathbb{Q}$ allora

$$\mathbb{Q} \ni a_{n+1}^2 = 2 + a_n \Rightarrow \quad a_n = a_{n+1}^2 - 2 \in \mathbb{Q}$$

che contraddice l'ipotesi induttiva $P(n)$ ossia che $a_n \notin \mathbb{Q}$.

$\square$

4. Dimostrare le seguenti proposizioni.

i) Se $x \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}^+$ allora $\sqrt[n]{x} \leq 1 + \dfrac{x-1}{n}$.

ii) Se $-1 < x < 0$ e $n \in \mathbb{N}^+$ allora $(1+x)^n < 1 + nx + \dfrac{n^2x^2}{2}$.

Svolgimento:

i) Poniamo $t = \dfrac{x-1}{n} \geq -1$ allora $x = 1+nt$

e la disuguaglianza è equivalente a

$$\sqrt[n]{x} = (1+nt)^{1/n} \leq 1+t = 1+\frac{x-1}{n}$$

ossia ($x \to x^{1/n}$ è crescente in $[0,+\infty)$)

$$1+nt \leq (1+t)^n$$

cioè la disuguaglianza di Bernoulli

(dimostrata a lezione). $\square$

ii) Ragioniamo per induzione.

Se $n=1$, $$(\cancel{1}+\cancel{x}) \overset{?}{<} \cancel{1}+\cancel{x}+\frac{n^2x^2}{2}$$

perché $x<0$ implica che $x^2>0$.

Sia $n \geq 1$ e dimostriamo che $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \underset{P(n)\,\wedge\, x>-1}{<} (1+x)\left(1+nx+\frac{n^2x^2}{2}\right).$$

Quindi è sufficiente verificare che

$$(1+x)\left(1+nx+\frac{n^2x^2}{2}\right) \overset{?}{\leq} 1+(n+1)x+\frac{(n+1)^2x^2}{2}$$

ossia

$$\cancel{1}+\cancel{nx}+\cancel{\frac{n^2x^2}{2}}+\cancel{x}+\cancel{nx^2}+\frac{n^2x^3}{2} \overset{?}{\leq} \cancel{1}+\cancel{nx}+\cancel{x}+\cancel{\frac{n^2x^2}{2}}+\cancel{nx^2}+\frac{x^2}{2}$$

e

$$\frac{n^2x^3}{2}-\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}\left(n^2x-1\right) \leq 0$$

vale perché $x^2>0$ e $n^2x-1<-1<0$ $\square$

5. Determinare la cardinalità dell'insieme S_a al variare di $a \in \mathbb{R}$ dove

$$S_a = \{x \in \mathbb{R} \,:\, \sqrt{x} + \sqrt{x-a} = 2\}.$$

Svolgimento:

L'equazione $\sqrt{x} + \sqrt{x-a} = 2$ è equivalente a

$$\begin{cases} \sqrt{x-a} = 2 - \sqrt{x} \\ x \geq 0 \\ x \geq a \end{cases} \iff \begin{cases} x - a = (2-\sqrt{x})^2 \\ x \geq 0 \\ 2 - \sqrt{x} \geq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \cancel{x} - a = 4 - 4\sqrt{x} + \cancel{x} \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{x} = 1 + \frac{a}{4} \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}.$$

$$\iff \begin{cases} x = \left(1 + \frac{a}{4}\right)^2 \\ 0 \leq 1 + \frac{a}{4} \leq 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \left(1 + \frac{a}{4}\right)^2 \\ -4 \leq a \leq 4 \end{cases}.$$

Quindi se $a \in [-4,4]$ allora S_a ha un unico elemento $x = \left(1+\frac{a}{4}\right)^2$, altrimenti $S_a = \emptyset$.

Così $|S_a| = \begin{cases} 1 & \text{se } a \in [-4,4], \\ 0 & \text{se } a \in \mathbb{R} \setminus [-4,4]. \end{cases}$

$\square$