Tutorato di Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

3 ottobre 2014

1. Risolvere le seguenti disuguaglianze per $x \in \mathbb{R}$:

i) $\dfrac{x(x+1)^2}{(x^2-16)} \leq \dfrac{(x+1)^3}{(x^2+2x-24)}$

ii) $\sqrt{2-\sqrt{2+x}} \geq x$

iii) $8 \leq 16^{(\sin(x))^2} + 16^{(\cos(x))^2} \leq 17$

2. Dimostrare le seguenti proposizioni.

i) Per ogni intero $n \geq 1$, $\quad 2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.

ii) Per ogni intero $n \geq 1$, $\quad 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} > 0$.

iii) Per ogni intero $n \geq 3$, $\quad n^{n+1} > (n+1)^n$.

3. Dimostrare che i seguenti numeri sono irrazionali.

i) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

ii) $\log_2(3)$

iii) $\sqrt{2},\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\ ,\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}, \ldots$

4. Dimostrare le seguenti proposizioni.

i) Se $x \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}^+$ allora $\sqrt[n]{x} \leq 1 + \dfrac{x-1}{n}$.

ii) Se $-1 < x < 0$ e $n \in \mathbb{N}^+$ allora $(1+x)^n < 1 + nx + \dfrac{n^2x^2}{2}$.

5. Determinare la cardinalità dell'insieme S_a al variare di $a \in \mathbb{R}$ dove

$$S_a = \{x \in \mathbb{R} \ : \ \sqrt{x} + \sqrt{x-a} = 2\}.$$