

LEZIONE 18 - Gi 6/11/2014

Esercizio. Determinare gli eventuali asintoti della funzione

$$f(x) = \sqrt[4]{x^4 + x^3} - x.$$

Dato che $D_f = \mathbb{R} \setminus (-1, 0)$ dobbiamo controllare se per $x \rightarrow +\infty$ che per $x \rightarrow -\infty$.

Per $x \rightarrow +\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}} - x}{x}$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ x > 0}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right)}{x} = 0$$

$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right)$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ y = \frac{1}{x}}}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{(1+y)^{\frac{1}{4}} - 1}{y} = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{4}}$$

Per $x \rightarrow -\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}} - x}{x}$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ x < 0}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}} + 1 \right)}{x} = -2$$

$$q = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[4]{x^4 + x^3} - x - (-2)x)$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ y = \frac{1}{x}}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}} + x \right) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{-(1+y)^{\frac{1}{4}} + 1}{y} = -\frac{1}{4}$$

$$\boxed{y = -2x - \frac{1}{4}}$$

DEF. Una funzione f si dice MONOTONA in un intervallo I se f è crescente in I oppure se f è decrescente in I .

TEO. (Limite di funzioni monotone)

Sia $f: (a, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ con $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

1) Se f è crescente in (a, x_0) allora

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup \{f(x) : x \in (a, x_0)\}$$

2) Se f è decrescente in (a, x_0) allora

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \inf \{f(x) : x \in (a, x_0)\}.$$

dim. Solo da 1) per $x_0 \in \mathbb{R}$, $\sup \{f(x) : x \in (a, x_0)\} = L \in \mathbb{R}$.

Per le proprietà dell'estremo superiore

i) $\forall x \in (a, x_0), \quad f(x) \leq L,$

ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_1 \in (a, x_0) : L - \varepsilon < f(x_1).$

Sia $\varepsilon > 0$ allora per $\delta = x_0 - x_1 > 0$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$

$$L - \varepsilon < \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ii)}}}{f(x_1)} \leq \underset{\substack{\uparrow \\ x_1 < x \\ f \text{ crescente}}}{f(x)} \leq L < \underset{\substack{\uparrow \\ \text{i)}}}{L + \varepsilon}$$

ovvero $|f(x) - L| < \varepsilon.$

□

Oss. Un enunciato simile vale per le successioni

1') $\forall n \geq 0, a_n \leq a_{n+1} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup \{a_n : n \geq 0\}.$

2') $\forall n \geq 0, a_n \geq a_{n+1} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf \{a_n : n \geq 0\}.$

x CASA: Dimostrare 1') e 2').

TEO. (Numero di Nepero)

I seguenti limiti esistono, e sono uguali ad un numero appartenente all'intervallo $(2,3)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^y$$

Tale numero n definisce come NUMERO DI NEPERO e n indica con il simbolo "e".

$$e \approx 2.718281828459...$$

dim.

Dividiamo la dimostrazione in 3 parti.

$$1) \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = L \in (2,3)$$

Se $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ per $n \geq 1$ allora la successione $\{a_n\}_{n \geq 1}$ è strettamente crescente.

Infatti se consideriamo i numeri

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right), \left(1+\frac{1}{n}\right), \dots, \left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n \text{ volte}}, 1$$

per la disuguaglianza AM-GM

$$\underbrace{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1\right)^{\frac{1}{n+1}}}_{\substack{\text{(media geom.)} \\ \uparrow \\ \text{non sono} \\ \text{tutti} =}} < \underbrace{\frac{n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) + 1}{n+1}}_{\text{(media aritm.)}} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

Da cui segue che $a_n < a_{n+1}$.

Dunque per 1') $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n : n \geq 1\} = L$.

Ora facciamo vedere che $L \in (2, 3)$.

Per la stretta crescenza $2 = a_1 < L$.

Inoltre per $n \geq 1$,

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

$\uparrow$ BN $\uparrow$ $\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$
 $\forall k \geq 0$

$$\leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

$\uparrow$ $k! \geq 2^{k-1}$ $\uparrow$ $\sum_{k=0}^{n-1} x^k$

$\forall k \geq 1$

Quindi $\sup \{a_n : n \geq 1\} = L \leq 3$.

× CASA "Ritoccare" le disuguaglianze precedenti in modo da garantire che $L < 3$.

$$2) \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{\uparrow \\ x \rightarrow +\infty}} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = L$$

$y = \frac{1}{x}$

Infatti posto $n = \lfloor y \rfloor$ vale che $n \leq y < n+1$ e

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Inoltre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = L \cdot 1 = L,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} = L \cdot 1 = L.$$

Quindi per il teorema del doppio confronto
anche $(1 + \frac{1}{y})^y \rightarrow L$.

$$3) \lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{\uparrow \\ y = \frac{1}{x} \\ y \rightarrow -\infty}} (1 + \frac{1}{y})^y = L$$

e la conclusione vale perché limite destro
e sinistro esistono e sono uguali. Infatti,

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{y})^y = \lim_{\substack{\uparrow \\ t = -y \\ t \rightarrow +\infty}} (1 - \frac{1}{t})^{-t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{t-1})^{t-1} \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{t-1}) = L \cdot 1 = L$$

$$\left(\text{perché } (1 - \frac{1}{t})^{-t} = \left(\frac{t}{t-1} \right)^t = \left(1 + \frac{1}{t-1} \right)^{t-1+1} \right).$$

□

Oss. $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} (1 + \frac{a}{y})^y = \lim_{\substack{\uparrow \\ t = \frac{a}{y} \\ t \rightarrow 0}} (1+t)^{\frac{a}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left((1+t)^{\frac{1}{t}} \right)^a = e^a.$$