Prova scritta di Analisi Matematica I - C. L. in Matematica - 2 settembre 2015

Nome e cognome:

---

1. Sia l'equazione $2|z|\mathrm{Re}(z) = \sqrt{5}(\overline{z} - 2iz + a)$.

i) Determinare i numeri complessi z che verificano l'equazione per $a = -2$.

ii) Esiste $a \in \mathbb{R}$, tale che l'equazione ha almeno due soluzioni complesse distinte?

Svolgimento: Sia $z = x + iy$ allora l'equazione diventa

$$2\sqrt{x^2+y^2}\cdot x = \sqrt{5}\,(x - iy - 2i(x+iy) + a)$$

da cui, separando la parte reale e la parte immaginaria, si ottiene

$$\begin{cases} 2\sqrt{x^2+y^2}\cdot x = \sqrt{5}\,(x+2y+a) \\ y = -2x \end{cases}.$$

Sostituendo, la prima equazione diventa

$$2\sqrt{x^2+4x^2}\cdot x = \sqrt{5}\,(x-4x+a)$$

ossia $f(x) = a$ dove $f(x) = 2|x|\cdot x + 3x$.

Osserviamo che f è una funzione continua, strettamente crescente tale che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

ii) Dunque per il teorema dei valori intermedi e la stretta monotonia, l'equazione $f(x) = a$ ha un'unica soluzione x_0 e così l'unica soluzione dell'equazione complessa è $z_0 = x_0 - 2ix_0$.

i) Nel caso $a = -2$ si ha che $2|x|x + 3x = -2$.
Necessariamente $x < 0$ e $-2x^2 + 3x + 2 = 0$.
Così $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{-4} \begin{cases} \boxed{-\frac{1}{2}} \\ 2 \end{cases}$ e $z = -\frac{1}{2} + i$. $\square$

2. Calcolare il seguente limite al variare di $a \in \mathbb{R}^+$,

$$\lim_{x\to+\infty} x^a \left(\arctan\left(\sqrt{x^2+5x+1}\right) - \arctan(x)\right).$$

Svolgimento:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{-a}}\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{x^2+5x+1}\right) - \operatorname{arctg} x\right) = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(-a)x^{-a-1}}\left(\frac{2x+5}{1+(x^2+5x+1)}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+5x+1}} - \frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{a+1}}{-a}\cdot\frac{1}{x^2}\left(\frac{2+\frac{5}{x}}{\left(1+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\cdot 2\left(1+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{1/2}} - \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{a-1}}{-a}\left(\left(2+\frac{5}{x}\right)\left(1-\frac{5}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{5}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) - \left(1+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)$$

se $y\to 0$ allora $(1+y)^\alpha = 1+\alpha y+o(y)$.

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{a-1}}{-a}\left(\cancel{1}+\cancel{\frac{5}{2x}}-\frac{5}{x}-\cancel{\frac{5}{2x}}-\cancel{1}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{a}\cdot x^{a-2}\left(1+o(1)\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0<a<2 \\ \frac{5}{2} & \text{se } a=2 \\ +\infty & \text{se } 2<a \end{cases}.$$

$\square$

3. Data la ricorrenza

$$x_1 = 0, \qquad x_{n+1} = \ln\left(\frac{2+e^{x_n}}{1+e^{x_n}}\right) \qquad \text{per } n \geq 1,$$

determinare se la successione $\{x_n\}_{n\geq 1}$ è convergente e, nel caso, calcolarne il limite.

Svolgimento:

Se $y_n = e^{x_n}$ e consideriamo la ricorrenza

$$y_1 = 1, \quad y_{n+1} = f(y_n) \text{ dove } f(t) = \frac{2+t}{1+t}.$$

La funzione f è derivabile e strettamente crescente in $(-1,+\infty)$. Inoltre

$$f([1,2]) = [f(2), f(1)] = [\tfrac{4}{3}, 2] \subset [1,2],$$

$$\sup_{[1,2]} |f'(t)| = \sup_{[1,2]} \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{1}{4} < 1.$$

Quindi f è una contrazione su $[1,2]$ con un unico punto fisso $\sqrt{2}$:

$$\frac{2+t}{1+t} = t \iff t^2 = 2 \iff t = \begin{cases} \boxed{+\sqrt{2}} \\ -\sqrt{2} \end{cases}.$$

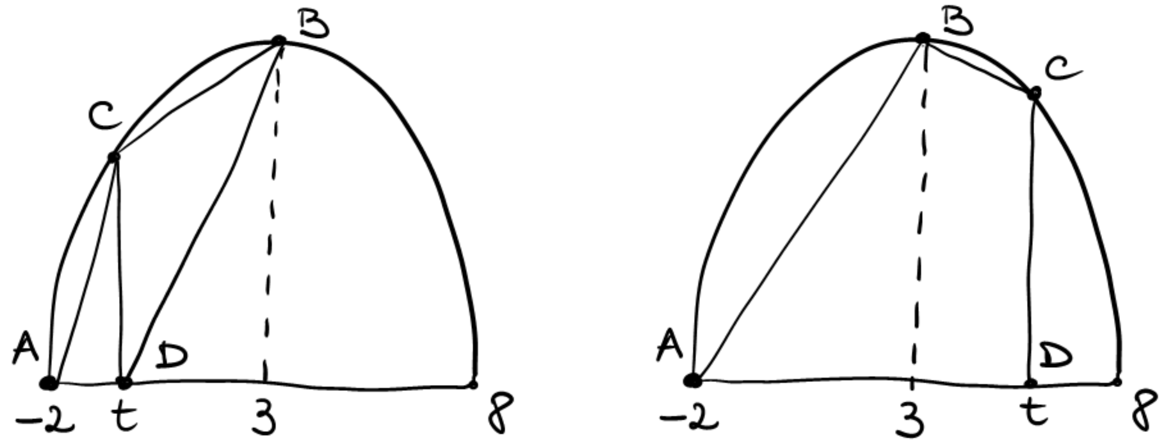
Dato che $y_n \to \sqrt{2}$, per la continuità della funzione logaritmo,

$$x_n = \ln(y_n) \to \ln(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\ln 2.$$

$\square$

4. Per $t \in (-2, 8)$, sia $Q(t)$ l'area del quadrilatero convesso di vertici A, B, C, D dove $A = (-2, 0)$, $B = (3, 25)$, $C = (t, -t^2 + 6t + 16)$ e $D = (t, 0)$.
Determinare $t_0 \in (-2, 8)$ tale che $Q(t_0) = \sup\{Q(t) \ : \ t \in (-2, 8)\}$.

Svolgimento: B è il vertice, A e $(8,0)$ sono i punti d'intersezione con l'asse x della parabola $y = f(x) = -x^2 + 6x + 16$, D è la proiezione di C sull'asse x. Distinguiamo due casi:



$-2 \leq t \leq 3$ $\qquad\qquad$ $3 \leq t \leq 8$

Se $2 \leq t \leq 3$ allora $Q(t) = \frac{1}{2} f(t)(t+2) + \frac{1}{2} f(t)(3-t)$.

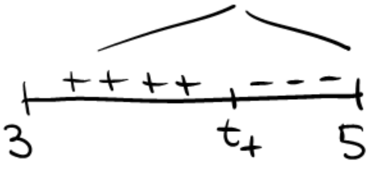
Quindi $\sup\limits_{[2,3]} Q(t) = \frac{5}{2} \sup\limits_{[2,3]} f(t) = \frac{5}{2} f(3) = \frac{125}{2} = Q(3)$

Se $3 \leq t \leq 8$ allora $Q(t) = \frac{125}{5} + \frac{1}{2}(25 + f(t))(t-3)$.

Così $Q'(t) = \frac{1}{2} f'(t)(t-3) + \frac{1}{2}(25 + f(t))$

$= \frac{1}{2}(-3t^2 + 18t + 23)$

$3t^2 + 18t + 23 = 0 \iff t_\pm = \dfrac{-9 \pm \sqrt{81+69}}{-3} = \dfrac{9 \pm 5\sqrt{6}}{3}$



Dato che $Q(t_+) > Q(3)$ il punto cercato è

$t_+ = \dfrac{9 + 5\sqrt{6}}{3}$. $\square$

5. Siano $f(x) = 6\arcsin(\sqrt{x})$ e $g(x) = \pi + \sqrt{3}(4x-1)$.

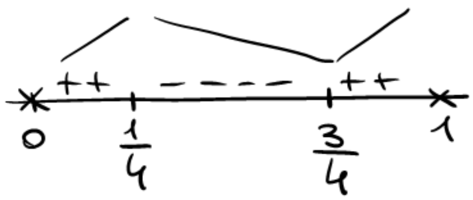
i) Dimostrare che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [0, 3/4]$,

ii) Quante sono le soluzioni dell'equazione $f(x) = g(x)$ in $[0,1]$?

Svolgimento: Sia $h(x) = f(x) - g(x)$. h è una funzione continua in $[0,1]$ e derivabile in $(0,1)$ con

$$h'(x) = \frac{6}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 4\sqrt{3} \geq 0$$

$$\iff \frac{\sqrt{3}}{4} \geq \sqrt{1-x}\,\sqrt{x} \iff \underbrace{x^2 - x + \frac{3}{16}}_{(x-\frac{1}{4})(x-\frac{3}{4})} \geq 0$$



i) Dato che $h(\frac{1}{4}) = 6\,\mathrm{arcsen}(\frac{1}{2}) - \pi = 0$

$f(x) - g(x) = h(x) \leq 0$ per $x \in [0, \frac{3}{4}]$.

ii) $h(x) < h(\frac{1}{4}) = 0$ per $x \in [0, \frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$.

e $h(1) = 6\,\mathrm{arcsen}(1) - \pi - 3\sqrt{3} = 2\pi - 3\sqrt{3} > 0$.

Quindi per il teorema dei valori intermedi e la stretta monotonia di h in $[3/4, 1]$, esiste un solo $x_0 \in (\frac{3}{4}, 1)$ tale che $h(x_0) = 0$.

Dunque $h = f - g$ ha in $[0,1]$ precisamente due zeri: $\frac{1}{4}$ e x_0.

□