Prova scritta di Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"
2 settembre 2015

1. Sia l'equazione $2|z|\mathrm{Re}(z) = \sqrt{5}(\overline{z} - 2iz + a)$.

i) Determinare i numeri complessi z che verificano l'equazione per $a = -2$.

ii) Esiste $a \in \mathbb{R}$, tale che l'equazione ha almeno due soluzioni complesse distinte?

2. Calcolare il seguente limite al variare di $a \in \mathbb{R}^+$,

$$\lim_{x \to +\infty} x^a \left(\arctan\left(\sqrt{x^2 + 5x + 1}\right) - \arctan(x) \right).$$

3. Data la ricorrenza

$$x_1 = 0, \qquad x_{n+1} = \ln\left(\frac{2 + e^{x_n}}{1 + e^{x_n}}\right) \qquad \text{per } n \geq 1,$$

determinare se la successione $\{x_n\}_{n \geq 1}$ è convergente e, nel caso, calcolarne il limite.

4. Per $t \in (-2, 8)$, sia $Q(t)$ l'area del quadrilatero convesso di vertici A, B, C, D dove $A = (-2, 0)$, $B = (3, 25)$, $C = (t, -t^2 + 6t + 16)$ e $D = (t, 0)$. Determinare $t_0 \in (-2, 8)$ tale che $Q(t_0) = \sup\{Q(t) \ : \ t \in (-2, 8)\}$.

5. Siano $f(x) = 6 \arcsin(\sqrt{x})$ e $g(x) = \pi + \sqrt{3}(4x - 1)$.

i) Dimostrare che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [0, 3/4]$,

ii) Quante sono le soluzioni dell'equazione $f(x) = g(x)$ in $[0, 1]$?