Prova scritta di Analisi Matematica I - C. L. in Matematica - 29 luglio 2015

Nome e cognome: ⌊_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|⌋

---

1. Determinare le soluzioni $(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ del seguente sistema

$$\begin{cases} w(z\overline{w} - 1) = i(z\overline{w} - 1) \\ 8w^2z^2 = |z|^3 \end{cases} .$$

Svolgimento: Dalla prima equazione abbiamo che

$$(w - i)(z\overline{w} - 1) = 0$$

quindi distinguiamo due casi: $w = i$ e $w = 1/\overline{z}$.

1°) Se $w = i$ la seconda equazione diventa

$$-8z^2 = |z|^3.$$

Sia $z = |z|e^{i\theta}$ allora

$$-8|z|^2 e^{2i\theta} = |z|^3$$

Quindi $z = 0$ oppure se $z \neq 0$

$$8e^{i(2\theta + \pi)} = -8e^{2i\theta} = |z|$$

da cui $|z| = 8$ e $2\theta + \pi = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ ossia

$\theta = -\frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k = 0, 1$.

Così nel primo caso le soluzioni sono:

$$\begin{matrix} z = 0 \\ w = i \end{matrix} \quad , \quad \begin{matrix} z = 8e^{-\frac{\pi}{2}i} = -8i \\ w = i \end{matrix} \quad , \quad \begin{matrix} z = 8e^{\frac{\pi}{2}i} = 8i \\ w = i \end{matrix} \quad .$$

2°) Se $w = 1/\bar{z}$ la seconda equazione diventa

$$8\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2 = |z|^3.$$

Sia $z = |z|e^{i\theta}$ allora

$$8\,\frac{\cancel{|z|^2}\, e^{2i\theta}}{\cancel{|z|^2}\, e^{-2i\theta}} = |z|^3, \qquad 8\, e^{4i\theta} = |z|^3.$$

Quindi $|z| = 2$ e $4\theta = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ ossia

$\theta = \frac{k\pi}{2}$ con $k = 0, 1, 2, 3$.

Così nel secondo caso le soluzioni sono:

$$z = 2e^{i0} = 2, \quad w = \frac{1}{2}, \qquad z = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i, \quad w = \frac{i}{2},$$

$$z = 2e^{i\pi} = -2, \quad w = -\frac{1}{2}, \qquad z = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i, \quad w = -\frac{i}{2}.$$

Quindi le soluzioni del sistema sono

$$(z, w) \in \left\{ \begin{array}{l} (0, i), (-8i, i), (8i, i), (2, \frac{1}{2}), \\ (2i, \frac{i}{2}), (-2, -\frac{1}{2}), (-2i, -\frac{i}{2}) \end{array} \right\}.$$

$\square$

2. Calcolare il seguente limite al variare di $a \in \mathbb{R}^+$,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{e^{2x} - e^2\sqrt{2-x}}{\sin(\pi(x+(x-1)^a))}.$$

Svolgimento: Per $a>0$

$$\lim_{x\to 1^+} \ldots = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{H}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{2e^{2x} + e^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2-x}}}{\cos(\pi(x+(x-1)^a)) \cdot \pi(1+a(x-1)^{a-1})}$$

$$= \frac{\frac{5}{2}e^2}{(-1)\cdot\pi} \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1+a(x-1)^{a-1}} = \begin{cases} -\frac{5e^2}{2\pi} & \text{se } a>1, \\ -\frac{5e^2}{4\pi} & \text{se } a=1, \\ 0 & \text{se } 0<a<1. \end{cases}$$

$\square$

3. Sia $P_t = (t, t^2)$ con $t > 0$, allora esiste un unico punto Q_t sul grafico della parabola $y = x^2$ tale che la retta tangente in P_t è ortogonale alla retta tangente in Q_t. Sia $d(t)$ la lunghezza del segmento P_tQ_t.

i) Determinare l'insieme $\{d(t) \ : \ t \in (0, +\infty)\}$.

ii) Calcolare $\lim_{t\to+\infty} \left(d(t) - t^2\right)$.

Svolgimento: La retta tangente in $P_t = (t, t^2)$ ha equazione $y = 2t(x-t)+t^2 = 2tx - t^2$ e la retta tangente in $Q_t = (s, s^2)$ ha equazione $y = 2sx - s^2$.

Tali rette sono ortogonali se e solo se $2t \cdot 2s = -1$ da cui $s = -1/4t$. Così

$$d(t) = |P_t - Q_t| = \left((t-s)^2 + (t^2-s^2)^2\right)^{1/2}$$
$$= \left(t^2 + \frac{1}{16t^2} + \frac{1}{2} + t^4 + \frac{1}{64t^4} - \frac{1}{8}\right)^{1/2}.$$

i) Osserviamo che $d(t)$ è una funzione continua in $(0,+\infty)$, $\lim_{t\to+\infty} d(t) = +\infty$ e

$$(d(t))^2 = \underbrace{t^2 + \frac{1}{16t^2}}_{\geq \frac{1}{2}} + \frac{1}{2} + \underbrace{t^4 + \frac{1}{64t^4}}_{\geq 1/8} - \frac{1}{8}$$

perché $x^2+y^2 \geq 2xy$ e vale $=$ se $x=y$

$$\geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{8}} - \cancel{\frac{1}{8}} = 1 = \left(d\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)^2.$$

Quindi per il teorema dei valori intermedi

$$\{d(t) : t \in (0,+\infty)\} = [1, +\infty).$$

$\square$

ii) Si ha che

$$d(t) = \left(t^2 + \frac{1}{16t^2} + \frac{1}{2} + t^4 + \frac{1}{64t^4} - \frac{1}{8}\right)^{1/2}$$

$$= t^2\left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{16t^6} + \frac{1}{2t^4} + 1 + \frac{1}{64t^8} - \frac{1}{8t^4}\right)^{1/2}$$

$$= t^2\left(1 + \frac{1}{t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)^{1/2}$$

$$= t^2\left(1 + \frac{1}{2}t^2 + o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)$$

$$= t^2 + \frac{1}{2} + o(1).$$

Quindi $\lim_{t \to +\infty} \left(d(t) - t^2\right) = \frac{1}{2}.$ $\square$

4. Sia f una funzione continua in $(-1,1)$ tale che $f'_-(x_0) < 0$ e $f'_+(x_0) > 0$ per un certo $x_0 \in (-1,1)$. Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni.

i) x_0 è un punto di minimo relativo.

ii) Esiste $r > 0$ tale che la funzione f è decrescente in $(x_0 - r, x_0)$ ed è crescente in $(x_0, x_0 + r)$.

Svolgimento:

i) VERO. Per definizione di $f'_-(x_0)$ e per il teorema della permanenza del segno $\exists\ r_1 > 0$ tale che $\forall x \in (-1,1) \cap (x_0 - r_1, x_0)$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0 \underset{x<x_0}{\Longrightarrow} f(x) > f(x_0).$$

Analogamente $\exists\ r_2 > 0$ tale che $\forall x \in (-1,1) \cap (x_0, x_0 + r_2)$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0 \underset{x>x_0}{\Longrightarrow} f(x) > f(x_0).$$

Quindi

$$\forall x \in (-1,1) \cap (x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\},\quad f(x) > f(x_0)$$

con $r = \min(r_1, r_2)$ ossia x_0 è un punto di minimo relativo di f. $\square$

ii) FALSO. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} |x| + 2x^2 \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Se $x_0 = 0$ allora $f'_\pm(0) = \lim_{x \to 0^\pm} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \pm 1$.

Inoltre per $x > 0$

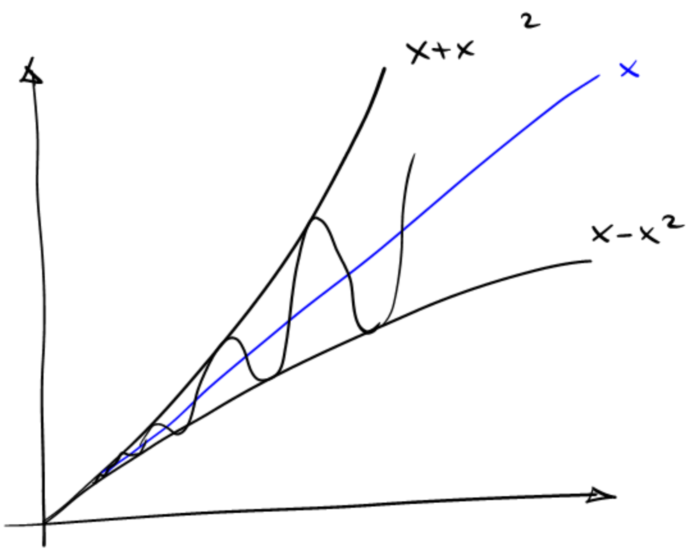
$$f'(x) = 1 + 4x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Si ha che per $k \in \mathbb{N}^+$

$$f'\left(\frac{1}{2k\pi}\right) = 1 - 2 = -1$$

e quindi per la continuità di f' in $(0, +\infty)$ per ogni k, esiste un intorno di $\frac{1}{2k\pi}$ dove f' è negativa ossia f è decrescente.

Dato che $\frac{1}{2k\pi} \to 0^+$, non esiste un intorno destro di 0 dove la funzione è crescente.



$\square$

5. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, determinare (nel caso esista) l'equazione di una retta $y = m_k x + q_k$ che intersechi il grafico della funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}$$

in esattamente k punti distinti.

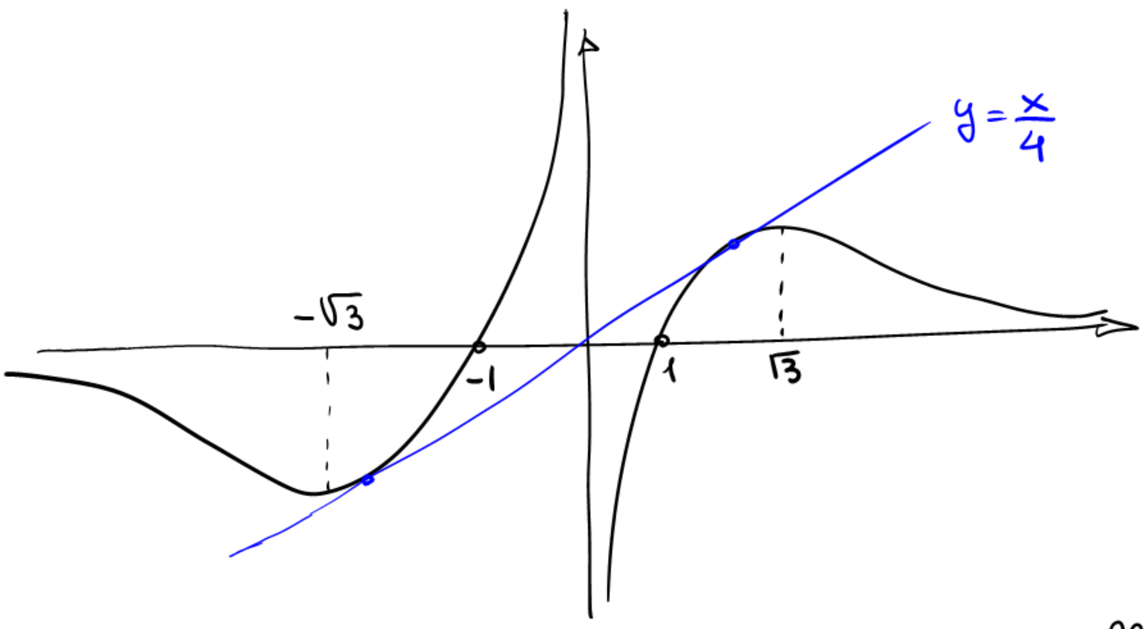
Svolgimento: L'equazione data è equivalente in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ a

$$mx^4 + qx^3 - x^2 + 1 = 0.$$

quindi il numero di intersezioni k è ≤ 4.

Dato che $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} = \frac{-x^2+3}{x^4}$ si ha

f': $\;-\;$ | $-\sqrt{3}$ | $\;+\;$ | 0 | $\;+\;$ | $\sqrt{3}$ | $\;-\;$. Inoltre $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.



Se consideriamo le rette orizzontali allora

$\boxed{k=1}$ per $y=1$. $\left(1 > f(\sqrt{3}) = 2/3\sqrt{3}\right)$.

$\boxed{k=2}$ per $y=0$ (le soluzioni sono $x = \pm 1$).

$\boxed{k=3}$ per $y=\frac{1}{4}$ $\left(0 < \frac{1}{4} < f(\sqrt{3})\right)$.

Se consideriamo le rette passanti per l'origine l'equazione diventa

$$mx^4 - x^2 + 1 = 0 \quad \text{con } \Delta = 1 - 4m.$$

Allora

$\boxed{k=0}$ per $y = x$ $\quad (m = 1 \Rightarrow \Delta = -3 < 0)$

$\boxed{k=4}$ per $y = \frac{x}{8}$ $\quad \Big(m = \frac{1}{8} \Rightarrow \Delta = \frac{1}{2} > 0$ e le soluzioni sono

$$\pm \left(\frac{1 \pm \sqrt{1/2}}{1/4} \right)^{1/2} = \pm \sqrt{4 \pm \sqrt{8}} \Big).$$

$\square$