Prova scritta di Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

29 luglio 2015

1. Determinare le soluzioni $(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ del seguente sistema

$$\begin{cases} w(z\overline{w} - 1) = i(z\overline{w} - 1) \\ 8w^2 z^2 = |z|^3 \end{cases} .$$

2. Calcolare il seguente limite al variare di $a \in \mathbb{R}^+$,

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{e^{2x} - e^2\sqrt{2-x}}{\sin(\pi(x + (x-1)^a))}.$$

3. Sia $P_t = (t, t^2)$ con $t > 0$, allora esiste un unico punto Q_t sul grafico della parabola $y = x^2$ tale che la retta tangente in P_t è ortogonale alla retta tangente in Q_t. Sia $d(t)$ la lunghezza del segmento $P_t Q_t$.

i) Determinare l'insieme $\{d(t) \ : \ t \in (0, +\infty)\}$.

ii) Calcolare $\lim_{t \to +\infty} \big(d(t) - t^2\big)$.

4. Sia f una funzione continua in $(-1, 1)$ tale che $f'_-(x_0) < 0$ e $f'_+(x_0) > 0$ per un certo $x_0 \in (-1, 1)$. Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni.

i) x_0 è un punto di minimo relativo.

ii) Esiste $r > 0$ tale che la funzione f è decrescente in $(x_0 - r, x_0)$ ed è crescente in $(x_0, x_0 + r)$.

5. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, determinare (nel caso esista) l'equazione di una retta $y = m_k x + q_k$ che intersechi il grafico della funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}$$

in esattamente k punti distinti.