Prova scritta di Analisi Matematica I - C. L. in Matematica - 24 giugno 2015

Nome e cognome:

---

1. Rispondere alle seguenti domande.

i) Quali sono i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z+2+i|^2 + 4\overline{z} + 6 + 4i = 0$?

ii) Esiste $w \in \mathbb{C}$ tale che $|w| < 9$ e l'equazione $|z+2+i|^2 + 4\overline{z} + w = 0$ non è soddisfatta per nessun numero $z \in \mathbb{C}$?

Svolgimento: i) Sia $z = x+iy$, allora l'equazione diventa

$$(x+2)^2 + (y+1)^2 + 4(x-iy) + 6 + 4i = 0,$$

$$(x^2+8x+11+y^2+2y) + 4i(1-y) = 0,$$

e quindi separando la parte reale e la parte immaginaria si ottiene

$$x^2+8x+11+y^2+2y = 0 \quad e \quad 1-y=0.$$

Quindi $y=1$ e sostituendo nella prima si ha che

$$x^2+8x+14=0 \implies x = -4 \pm \sqrt{2}.$$

Così le soluzioni sono

$$z_1 = -4+\sqrt{2}+i \quad e \quad z_2 = -4-\sqrt{2}+i.$$

$\square$

ii) Poniamo $z = x+iy$ e $w = x_0 + iy_0$ allora l'equazione diventa

$$((x+2)^2 + (y+1)^2 + 4x + x_0) + i(y_0 - 4y) = 0$$

Dunque $y = y_0/4$ e

$$x^2 + 8x + \left(\left(\frac{y_0}{4}+1\right)^2 + x_0 + 4\right) = 0.$$

Quindi l'equazione data non è soddisfatta per nessun $z = x + iy \in \mathbb{C}$ se e solo se questa equazione di secondo grado in x non ha soluzioni reali. Ciò accade se e solo se $\Delta < 0$.

$$\Delta = 64 - 4\left(\left(\frac{y_0}{4}+1\right)^2 + x_0 + 4\right) < 0$$

ossia

$$12 < \left(\frac{y_0}{4}+1\right)^2 + x_0 \quad (*).$$

Esiste $w = x_0 + iy_0$ con $|w| < 9$ che soddisfa la disequazione $(*)$?

Sì. Ad esempio se $y_0 = 8$ allora $(*)$ diventa $3 < x_0$ e quindi basta porre $x_0 = 4$.

Così per $w = 4 + 8i$ l'equazione non ha soluzioni $z \in \mathbb{C}$ e

$$|w| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} < 9.$$

$\square$

2. Calcolare il seguente limite al variare di $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4 \arctan\left(\exp(n^a)\right)}{\pi} \right)^n .$$

Svolgimento: Sia L il limite da calcolare.

Se $a>0$ allora $n^a \to +\infty$ e $\frac{4}{\pi}\,\mathrm{arctg}(\exp(n^a)) \to 2$.

Quindi $L = 2^{+\infty} = +\infty$

Se $a=0$ allora $n^a = 1$ e $\frac{4}{\pi}\,\mathrm{arctg}(e) > 1$.

Quindi anche in questo caso $L = +\infty$.

Se $a<0$ allora $n^a \to 0^+$, $\frac{4}{\pi}\,\mathrm{arctg}(\exp(n^a)) \to 1$

e si ha la forma indeterminata 1^∞.

È così necessaria un'analisi più precisa.

Ricordando che $a^b = \exp(b \ln a)$, consideriamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{4}{\pi}\,\mathrm{arctg}(\exp(x^a))\right)}{1/x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\cancel{4/\pi}\,\mathrm{arctg}(\exp(x^a))} \cdot \frac{\cancel{4/\pi}}{1+(\exp(x^a))^2} \cdot \exp(x^a) \cdot a x^{a-1}}{-1/x^2}$$

$$= -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot a \cdot \lim_{x\to+\infty} x^{a+1} = \begin{cases} 2/\pi & \text{se } a=-1, \\ 0 & \text{se } a<-1, \\ +\infty & \text{se } -1<a<0. \end{cases}$$

Riassumendo

$$L = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>-1, \\ e^{2/\pi} & \text{se } a=1, \\ e^0 = 1 & \text{se } a<-1. \end{cases}$$

$\square$

3. Sia la seguente successione definite per ricorrenza,

$$x_0 = 7 \qquad \text{e} \qquad x_{n+1} = \ln(x_n - 3) + 5 \quad \text{per } n \geq 0.$$

i) Dimostrare che la successione $\{x_n\}_{n\geq 0}$ converge ad un limite finito.

ii) Determinare $A, B \in \mathbb{R}^+$ tali che $\forall n \in \mathbb{N}$, $A < \dfrac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n} < B$.

Svolgimento: i) Consideriamo la funzione

$$f(t) = \ln(t-3) + 5 \quad \text{per } t > 3.$$

Osserviamo che $f([6,7]) \subseteq (6,7)$.

Infatti dato che f è strettamente crescente per $t \in [6,7]$ si ha che

$$6 < \ln 3 + 5 = f(6) \leq f(t) \leq f(7) = \ln 4 + 5 < 7.$$

Inoltre f è derivabile in $[6,7]$ e

$$f'(t) = \frac{1}{t-3} \Rightarrow \sup_{t\in[6,7]} |f'(t)| = \frac{1}{3} \in (0,1)$$

Quindi f è una contrazione su $[6,7]$ e la successione $\{x_n\}_{n\geq 0}$ converge all'unico punto fisso L di f in $(6,7)$. $(L \simeq 6.146)$. $\square$

ii) Notiamo che

$$\frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n} = \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} \overset{\text{TVM}}{=} f'(t) = \frac{1}{t-3} \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$$

per qualche $t \in (x_{n+1}, x_n) \subseteq (6,7)$.

Quindi possiamo prendere $A = \frac{1}{4}$ e $B = \frac{1}{3}$.

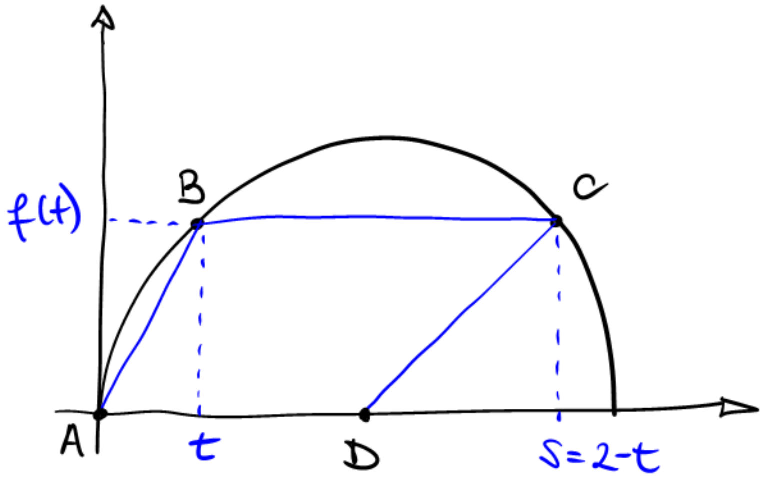
$\square$

4. Per $x \in [0,2]$ sia $f(x) = \sqrt{x(2-x)}$.
Per $t \in (0,1)$, sia $Q(t)$ l'area del quadrilatero di vertici

$$A = (0,0), \quad B = (t, f(t)), \quad C = (s, f(s)), \quad D = (1,0)$$

dove $s \in (1,2)$ è l'unico numero reale che soddisfa l'equazione $f(s) = f(t)$. Determinare $t_0 \in (0,1)$ tale che $Q(t_0) = \sup\{Q(t) \;:\; t \in (0,1)\}$.

Svolgimento: Notiamo che il grafico di $f(x) = \sqrt{x(2-x)}$ in $[0,2]$ è la semicirconferenza di centro di centro $(1,0)$ e raggio 1.



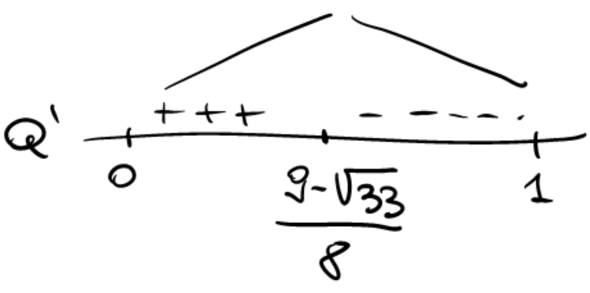
Quindi l'area del "trapezio" ABCD è

$$Q(t) = \frac{1}{2}\left(|AD| + |BC|\right) \cdot f(t)$$
$$= \frac{1}{2}(1+2-t-t) f(t) = \frac{1}{2}(3-2t)\sqrt{t(2-t)}\,.$$

Con $t \in (0,1)$. Così

$$Q'(t) = \frac{1}{2}\left(-2\sqrt{t(2-t)} + \frac{(3-2t)(2-2t)}{\sqrt{t(2-t)}}\right)$$
$$= \frac{4t^2 - 9t + 3}{2\sqrt{t(2-t)}}$$

da cui



Così $t_0 = \dfrac{9-\sqrt{33}}{8}$. $\square$

5. Rispondere alle seguenti domande.

i) Esiste un punto $P \in \mathbb{R}^2$ tale che nessuna retta tangente al grafico della funzione $\sin(x)$ passa per P?

ii) Esiste un punto $P \in \mathbb{R}^2$ tale che nessuna retta tangente al grafico della funzione $\sin(x) + x^2$ passa per P?

Svolgimento: i) Sia $f(t) = \mathrm{sen}(t)$ allora la retta tangente al grafico in $(t, f(t))$ è

$$y = \cos(t)(x-t) + \mathrm{sen}(t).$$

Quindi per $P = (x, y)$ passa una retta tangente se e solo se $\exists\, t \in \mathbb{R}$ tale che

$$g(t) \stackrel{\text{def}}{=} \cos(t)(x-t) + \mathrm{sen}(t) - y = 0.$$

Ora g è continua in $\mathbb{R}$ e per $k \in \mathbb{N}$

$$g(2k\pi) = 1 \cdot (x - 2k\pi) + 0 - y \xrightarrow{k \to +\infty} -\infty$$

$$g(-2k\pi) = 1 \cdot (x + 2k\pi) + 0 - y \xrightarrow{k \to +\infty} +\infty$$

Dunque per il Teorema della permanenza del segno $\exists\, k \in \mathbb{N}$ tale che $g(2k\pi) < 0$ e $g(-2k\pi) > 0$.

Allora per il Teorema degli zeri $\exists\, t \in (-2k\pi, 2k\pi)$ tale che $g(t) = 0$.

Quindi per ogni punto $P \in \mathbb{R}^2$ passa almeno una retta tangente. $\square$

ii) La funzione $f(t) = \operatorname{sen}(t) + t^2$ è strettamente convessa su $\mathbb{R}$ perché

$$f'(t) = \cos(t) + 2t \quad \text{e}$$

$$f''(t) = -\operatorname{sen}(t) + 2 \geq -1+2 = 1 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Quindi il grafico di f sta "sopra" ogni sua retta tangente. Questo vuol dire che se prendiamo un punto P nel "sopragrafico" ossia in $\{(x,y) : y > f(x)\}$, per tale punto non passa nessuna retta tangente.

Ad esempio possiamo prendere $P = (0,1)$.

$\square$