

Prova scritta di Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

24 giugno 2015

1. Rispondere alle seguenti domande.

- i) Quali sono i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z + 2 + i|^2 + 4\bar{z} + 6 + 4i = 0$?
- ii) Esiste $w \in \mathbb{C}$ tale che $|w| < 9$ e l'equazione $|z + 2 + i|^2 + 4\bar{z} + w = 0$ non è soddisfatta per nessun numero $z \in \mathbb{C}$?

2. Calcolare il seguente limite al variare di $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4 \arctan(\exp(n^a))}{\pi} \right)^n.$$

3. Sia la seguente successione definita per ricorrenza,

$$x_0 = 7 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = \ln(x_n - 3) + 5 \quad \text{per } n \geq 0.$$

- i) Dimostrare che la successione $\{x_n\}_{n \geq 0}$ converge ad un limite finito.
- ii) Determinare $A, B \in \mathbb{R}^+$ tali che $\forall n \in \mathbb{N}$, $A < \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n} < B$.

4. Per $x \in [0, 2]$ sia $f(x) = \sqrt{x(2-x)}$.

Per $t \in (0, 1)$, sia $Q(t)$ l'area del quadrilatero di vertici

$$A = (0, 0), \quad B = (t, f(t)), \quad C = (s, f(s)), \quad D = (1, 0)$$

dove $s \in (1, 2)$ è l'unico numero reale che soddisfa l'equazione $f(s) = f(t)$.
Determinare $t_0 \in (0, 1)$ tale che $Q(t_0) = \sup\{Q(t) : t \in (0, 1)\}$.

5. Rispondere alle seguenti domande.

- i) Esiste un punto $P \in \mathbb{R}^2$ tale che nessuna retta tangente al grafico della funzione $\sin(x)$ passa per P ?
- ii) Esiste un punto $P \in \mathbb{R}^2$ tale che nessuna retta tangente al grafico della funzione $\sin(x) + x^2$ passa per P ?