Prova scritta di Analisi Matematica I - C. L. in Matematica - 20 febbraio 2015

Nome e cognome:

---

1. Rispondere alle seguenti domande.

i) Quali sono gli elementi dell'insieme

$$A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ (12 - 5iz)(z - i) = z^3 + i\}?$$

ii) Per quali $R \geq 0$, $\exists w \in \mathbb{C}$ tale che $\forall z \in A$, $|w - z| = R$?

Svolgimento:

i) Per determinare A dobbiamo risolvere

$$(12-5iz)(z-i) = z^3+i = (z-i)(z^2+iz-1)$$

$$(z-i)(z^2+iz-1-12+5iz)=0$$

$$(z-i)(z^2+6iz-13)=0$$

Quindi gli elementi di A sono

$$i \ , \ -3i \pm \sqrt{(3i)^2+13} = -3i \pm 2$$

$\square$

ii) Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} |w-i| = R \\ |w+3i-2| = R \\ |w+3i+2| = R \end{cases} \quad \begin{array}{c} R \geq 0 \\ w = x+iy \\ \Longleftrightarrow \end{array} \quad \begin{cases} x^2+(y-1)^2 = R^2 \\ (x-2)^2+(y+3)^2 = R^2 \\ (x+2)^2+(y+3)^2 = R^2 \end{cases}$$

Dato che

$$(x-2)^2 + \cancel{(y+3)^2} = (x+2)^2 + \cancel{(y+3)^2} \Longleftrightarrow x = 0$$

e

$$0^2 + (y-1)^2 = (0-2)^2 + (y+3)^2$$

$$\cancel{y^2} - 2y + 1 = 4 + \cancel{y^2} + 6y + 9 \Longleftrightarrow y = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}.$$

Quindi $w = -\frac{3}{2}i$ e $R = |w-i| = \frac{5}{2}$.

$\square$

2. Calcolare il seguente limite al variare di $a \in \{1, 2, 3\}$,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3\left((1+x^a)^{1/x} - e^x\right)}{\sqrt{1+x^{3a}}-1}.$$

Svolgimento: Se $a=1$ allora

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e^x}{\left(\frac{(1+x^3)^{1/2}-1}{x^3}\right)} = \frac{e-1}{\frac{1}{2}} = 2(e-1).$$

Se $a=3$ allora

$$\frac{x^3\left(\exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x^3)\right) - e^x\right)}{(1+x^9)^{1/2}-1} = \frac{x^3\left(e^{x^2+o(x^2)} - e^x\right)}{\cancel{1}+\frac{x^9}{2}+o(x^9)-\cancel{1}}$$

$$= \frac{x^3\left(\cancel{1}+x^2+o(x^2)-\cancel{1}-x-o(x)\right)}{\frac{x^9}{2}+o(x^9)}$$

$$= \frac{-x^4+o(x^4)}{\frac{x^9}{2}+o(x^9)} \xrightarrow{x\to 0^+} -\infty.$$

Se $a=2$ allora

$$(1+x^6)^{1/2}-1 = \cancel{1}+\frac{x^6}{2}+o(x^6)\cancel{-1} = \frac{x^6}{2}+o(x^6),$$

$$(1+x^2)^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x^2)\right) = \exp\left(x-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)$$

$$= 1+\left(x-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)^2+\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)^3$$
$$+o\left(x-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)$$

$$= 1+x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3),$$

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3).$$

Quindi

$$\frac{x^3\left(\left(1+x^2\right)^{1/x}-e^x\right)}{\left(1+x^6\right)^{1/2}-1}=\frac{x^3\left(-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)}{\frac{x^6}{2}+o(x^6)}$$

$$=\frac{-\frac{x^6}{2}+o(x^6)}{\frac{x^6}{2}+o(x^6)}\xrightarrow{x\to 0^+}-1.$$

$\square$

3. Dimostrare che per ogni intero $n > 1$,

$$\frac{\ln(n)}{n} < \sqrt[n]{n} - 1 < \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Svolgimento: Dato che

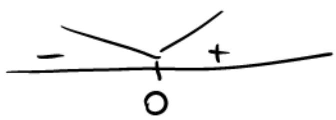
$$\frac{\ln(n)}{n} < \sqrt[n]{n} - 1 = \exp\left(\frac{\ln n}{n}\right) - 1$$

e $\frac{\ln n}{n} > 0$ per $n>1$ basta dimostrare che

$$\forall x>0, \quad x < e^x - 1.$$

Infatti se $h(x) = e^x - x - 1$ allora $h'(x) = e^x - 1$

$$h'(x) = e^x - 1$$



quindi $\forall x \neq 0$, $h(x) > h(0) = 0$.

La seconda disuguaglianza è equivalente a

$$n \overset{?}{<} \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n.$$

Espandendo la potenza del binomio si ha che

$$\Big(1 + \underbrace{\sqrt{\frac{2}{n}}}_{>0}\Big)^n \underset{n>1}{\geq} 1 + \underbrace{\binom{n}{1}\sqrt{\frac{2}{n}}}_{>0} + \binom{n}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^2$$

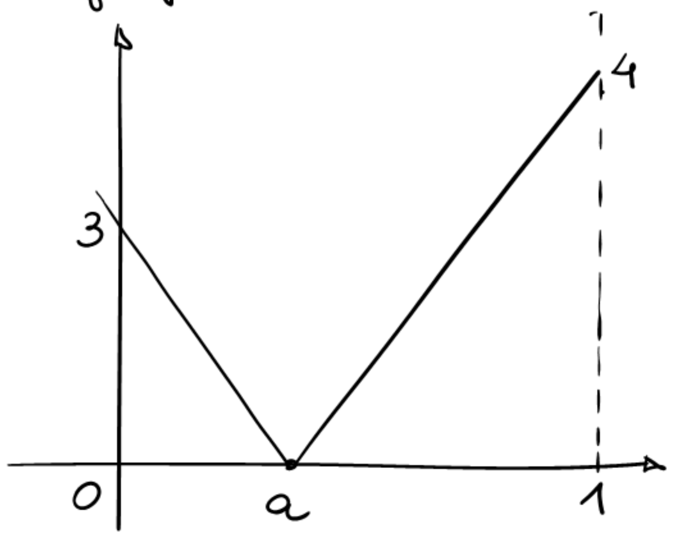
$$> 1 + \frac{\cancel{n}(n-1)}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{n}} = n. \qquad \square$$

4. Per $a \in (0,1)$ sia
$$F_a(x) = \frac{(7a-3)(x-a)+(a+3)|x-a|}{2a(1-a)}.$$
Il grafico $\{(x, F_a(x)) : x \in [0,1]\}$ è una linea spezzata e sia $L(a)$ la sua lunghezza.
Determinare l'insieme
$$\{L(a) : a \in (0,1)\}.$$

Svolgimento: Si ha che

$$F_a(x) = \begin{cases} \dfrac{\big((7a-3)+(a+3)\big)(x-a)}{2a(1-a)} = \dfrac{4}{1-a}(x-a) & \text{se } x \geq a \\ \dfrac{\big((7a-3)-(a+3)\big)(x-a)}{2a(1-a)} = \dfrac{3}{a}(a-x) & \text{se } x \leq a \end{cases}$$

quindi il grafico di F_a in $[0,1]$ è



Quindi la funzione $L : (0,1) \to \mathbb{R}$ è

$$L(a) = \sqrt{3^2+a^2} + \sqrt{4^2+(1-a)^2}\,.$$

Ora
$$\lim_{a\to 0^+} L(a) = L(0) = 3+\sqrt{17}$$
$$\wedge$$
$$\lim_{a\to 1^-} L(a) = L(1) = 4+\sqrt{10}$$

Inoltre L è derivabile in $(0,1)$ e

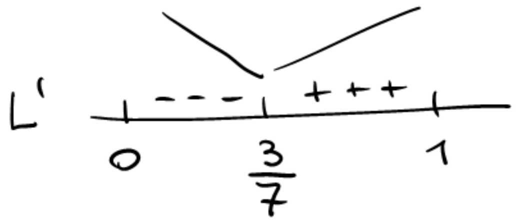
$$L'(a) = \frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}\sqrt{9+a^2}} - \frac{\cancel{2}(1-a)}{\cancel{2}\sqrt{16+(1-a)^2}} \overset{?}{>} 0$$

$$\iff a\sqrt{16+(1-a)^2} > (1-a)\sqrt{9+a^2}$$

$$\iff a^2(17-2a+a^2) > (1-a)^2(9+a^2)$$

$$\iff \cancel{a^4} - \cancel{2a^3} + 17a^2 > 9 - 18a + 10a^2 - \cancel{2a^3} + \cancel{a^4}$$

$$\iff 7a^2 + 18a - 9 > 0 \qquad a_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81+63}}{7} \begin{cases} 3/7 \\ -3 \end{cases}$$



Così $L\left(\frac{3}{7}\right) = 5\sqrt{2}$ è il valore minimo e per il diagramma di monotonia si ottiene che

$$L((0,1)) = [5\sqrt{2}, 4+\sqrt{10}).$$

$\square$

5. Sia $f_a(x) = \dfrac{a}{1+|x|}$.

i) Esiste $a > 0$ tale che l'equazione

$$f_a(x) = 3 - 2\sin(x) - 2\cos(x)$$

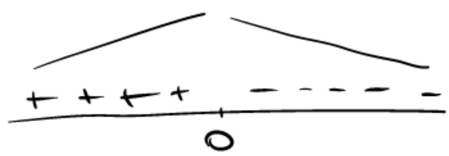
non ammetta soluzioni reali?

ii) Esiste $a > 0$ tale che ci siano due rette tangenti al grafico di f_a ortogonali tra loro?

Svolgimento:

Per $a>0$, $f_a(x)$ è una funzione pari, continua su $\mathbb{R}$ e derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Per $x\neq 0$,

$$f_a'(x) = \begin{cases} -\dfrac{a}{(1+|x|)^2} & \text{se } x>0 \\ \dfrac{a}{(1+|x|)^2} & \text{se } x<0 . \end{cases}$$



i) Dato che $f(0)=a$ e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ per il diagramma di monotonia, $f_a(\mathbb{R}) = (0,a]$.

Inoltre

$$g(x) \overset{\text{def}}{=} 3 - 2\operatorname{sen}x - 2\cos x = 3 - 2\sqrt{2}\left(\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

e per la continuità di g si ha che

$$g(\mathbb{R}) = [3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}].$$

Siccome $3-2\sqrt{2}>0$, affinché i grafici di f_a e g non si intersechino basta prendere $0<a<3-2\sqrt{2}$ così

$$f_a(\mathbb{R}) \cap g(\mathbb{R}) = \emptyset. \qquad \square$$

ii) Le due rette tangenti richieste esistono se e solo se $\exists\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ con $x_1 < x_2$ e

$$f_a'(x_1) \cdot f_a'(x_2) = -1 .$$

Affinché l'uguaglianza sia verificata è necessario che $x_1 < 0$ e $x_2 > 0$. Dunque

$$\frac{a}{(1+|x_1|)^2} \cdot \frac{-a}{(1+|x_2|)^2} = -1$$

ossia

$$a = (1+|x_1|)(1+|x_2|) .$$

Ad esempio si possono prendere $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ e così $a = 4$. In tal caso le rette tangenti ortogonali sono $y = -x+3$ e $y = x+3$.

$\square$