Prova scritta di Analisi Matematica I - C. L. in Matematica - 26 gennaio 2015

Nome e cognome:

---

1. Siano $A = \{z \in \mathbb{C} : |z+3i|^2 \geq 3|z|^2 + 1\}$ e $B = \{z \in \mathbb{C} : |z^4 + i| = |z^4 - i|\}$.

i) Rappresentare nel piano complesso l'insieme $A \cap B$.

ii) Trovare un polinomio di secondo grado $P(z)$ che sia iniettivo in A.

Svolgimento: i) Determiniamo A. Se $z = x+iy$ allora

$$x^2 + (y+3)^2 \geq 3(x^2+y^2)+1 \iff 2x^2+2y^2-6y \leq 8$$

$$\iff x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 \leq 4 + \frac{9}{4} = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

Quindi A è il cerchio di centro $\frac{3i}{2}$ e raggio $\frac{5}{2}$.

Determiniamo B. Se $z^4 = x+iy$ allora

$$x^2 + (y+1)^2 = x^2 + (y-1)^2 \iff 4y = 0 \iff y = 0.$$

Quindi

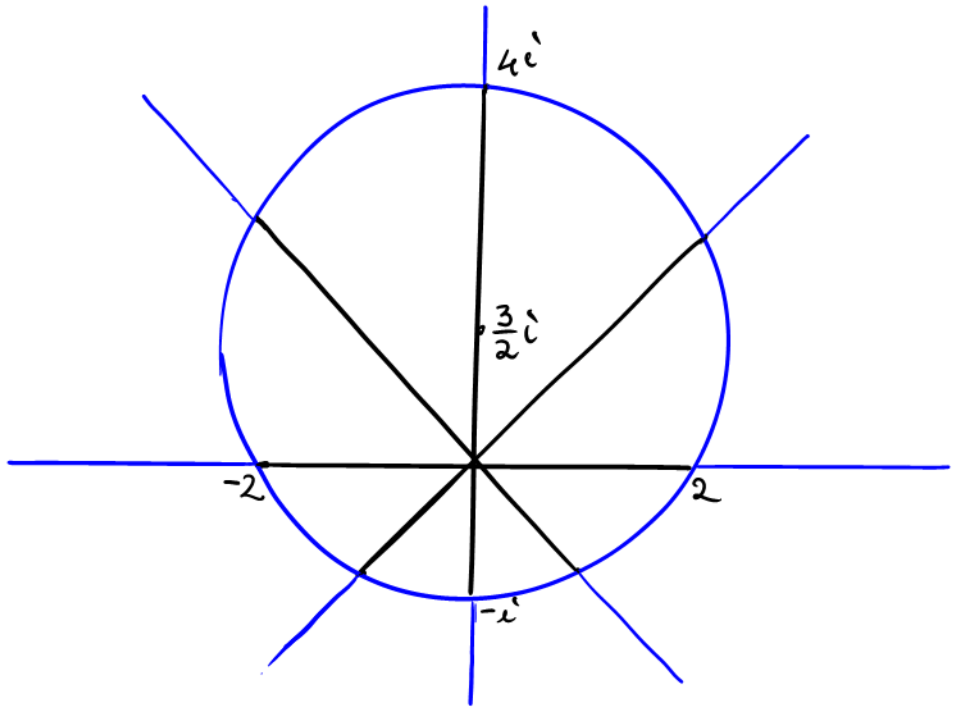
$$z^4 = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ |x| e^{i0} & \text{se } x > 0 \\ -|x| = |x| e^{i\pi} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e dunque

$$z = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \sqrt[4]{|x|}\, e^{i\left(\frac{k\pi}{2}\right)}, \quad k = 0,1,2,3 & \text{se } x > 0 \\ \sqrt[4]{|x|}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)}, \quad k = 0,1,2,3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

ossia B è l'insieme delle 8 semirette di origine O e angolo $\frac{k\pi}{4}$ con $k = 0,1,2,\ldots,7$.

Così nel piano complesso l'insieme $A \cap B$ è



$\square$

ii) Il polinomio $P(z) = z^2 + bz + c$ non è iniettivo in $A \iff \exists\, z_1, z_2 \in A$ con $z_1 \neq z_2$ tali che

$$0 = P(z_1) - P(z_2) = z_1^2 + bz_1 + \cancel{c} - z_2^2 - bz_2 - \cancel{c}$$

$$= \underbrace{(z_1 - z_2)}_{\neq 0} (z_1 + z_2 + b) \iff \frac{z_1 + z_2}{2} = -\frac{b}{2}$$

Dato che A è un insieme convesso, $\frac{z_1 + z_2}{2} \in A$ e dunque basta scegliere b in modo che $-\frac{b}{2} \notin A$.
Il valore di c è indifferente.
Ad esempio $3 \notin A$ implica che $P(z) = z^2 - 6z$ è iniettivo in A.

$\square$

2. Calcolare il seguente limite al variare di $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1-x^3) + a\ln|x|}{2x + \sqrt{2x^2+\sqrt{4x^4+2}}}.$$

Svolgimento: Sia $t=-x$ allora

$$\ldots = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(1+t^3) + a\ln(t)}{-2t+\sqrt{2t^2+\sqrt{4t^4+2}}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>-3 \\ 8 & \text{se } a=-3 \\ -\infty & \text{se } a<-3 \end{cases}.$$

Infatti per $t>0$

$$\ln(1+t^3)+a\ln(t) = \ln\left(t^{a+3}+t^a\right) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>-3 \\ 0 & \text{se } a=-3 \\ -\infty & \text{se } a<-3 \end{cases}$$

e se $a=-3$

$$\ln(1+t^3)+a\ln(t) = \ln\left(1+\frac{1}{t^3}\right) = \frac{1}{t^3}+o\left(\frac{1}{t^3}\right).$$

Inoltre, dato che $(1+s)^{1/2} = 1+\frac{s}{2}+o(s)$ per $s\to0$,

$$-2t+\sqrt{2t^2+\sqrt{4t^4+2}} = -2t+\left(2t^2+2t^2\left(1+\frac{1}{2t^4}\right)^{1/2}\right)^{1/2}$$

$$= -2t+\left(2t^2+2t^2\left(1+\frac{1}{4t^4}+o\left(\frac{1}{t^4}\right)\right)\right)^{1/2}$$

$$= -2t+\left(4t^2+\frac{1}{2t^2}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)^{1/2}$$

$$= -2t+2t\left(1+\frac{1}{8t^4}+o\left(\frac{1}{t^4}\right)\right)^{1/2}$$

$$= -2t+2t\left(1+\frac{1}{16t^4}+o\left(\frac{1}{t^4}\right)\right) = \frac{1}{8t^3}+o\left(\frac{1}{t^3}\right).$$

$\square$

3. Rispondere alle seguenti domande.

i) Per quali $a > 1$ si ha che $\forall x \in (0, +\infty)$, $\quad \log_a(x) < x < a^x$?

ii) Per quali $x > 0$ si ha che $\forall a \in (1, +\infty)$, $\quad \log_a(x) < x < a^x$?

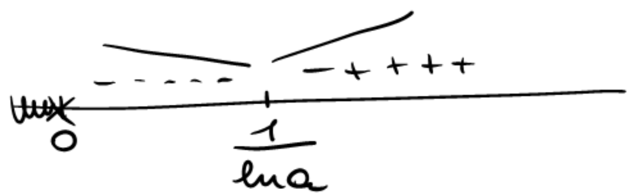
Svolgimento: Intanto osserviamo che per $x>0$ e $a>1$

$$\log_a(x) < x \iff x < a^x.$$

Quindi basta discutere una sola delle due disuguaglianze.

Sia $f(x) = x - \log_a(x) = x - \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

i) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x \ln a}$



così per $x>0$,

$$f(x) \geq f\left(\frac{1}{\ln a}\right) = \frac{1}{\ln a} - \frac{\ln(1/\ln a)}{\ln a} \overset{?}{>} 0$$

$$\iff 1 > \ln\left(\frac{1}{\ln a}\right) \iff e > \frac{1}{\ln a} \iff a > e^{1/e} \simeq 1.44$$

$\square$

ii) Per $x>0$,

$$\forall a>1,\ f(x)>0 \iff \forall a>1,\ \ln(a) > \frac{\ln x}{x}$$

$$\iff 0 = \inf\{\ln(a) : a>1\} \geq \frac{\ln x}{x}$$

$$\iff 0 \geq \ln x \iff 0 < x \leq 1.$$

$\square$

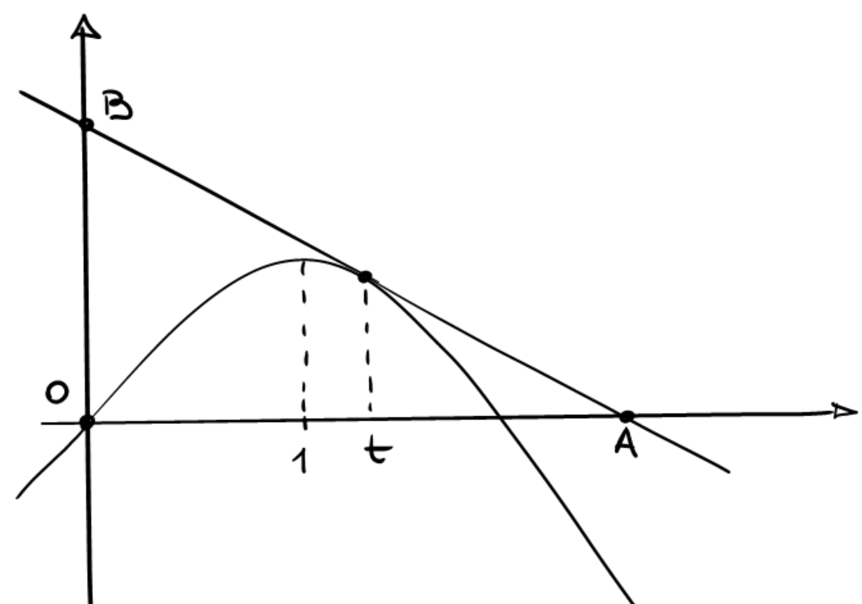
4. Per $t \in \mathbb{R}$ sia $L(t)$ la retta tangente in $(t, f(t))$ al grafico del polinomio

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3}.$$

i) Per $t > 1$ la retta $L(t)$ interseca l'asse x in un punto A e l'asse y in un punto B. Qual è il valore minimo dell'area del triangolo AOB dove O indica l'origine?

ii) Esistono tre numeri reali distinti t_1, t_2 e t_3 tali che le rette $L(t_1)$, $L(t_2)$ e $L(t_3)$ si intersecano a due a due e i tre punti di intersezione individuano un triangolo equilatero?

Svolgimento:



L'equazione della retta tangente $L(t)$ è

$$y = f'(t)(x-t) + f(t) = (1-t^2)(x-t) + t - \frac{t^3}{3}$$

$$= (1-t^2)x + \frac{2t^3}{3}.$$

Quindi $B = \left(0, \frac{2t^3}{3}\right)$, $A = \left(\frac{2t^3}{3(t^2-1)}, 0\right)$ e l'area del triangolo OAB in funzione di $t>1$ è

$$S(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2t^3}{3} \cdot \frac{2t^3}{3(t^2-1)} = \frac{2}{9} \cdot \frac{t^6}{t^2-1}.$$

Studio della monotonia di S:

$$S'(t) = \frac{2}{9(t-1)^2} \cdot \big(\underbrace{6t^5(t^2-1) - t^6 \cdot 2t}_{t^5(4t^2-6)}\big)$$

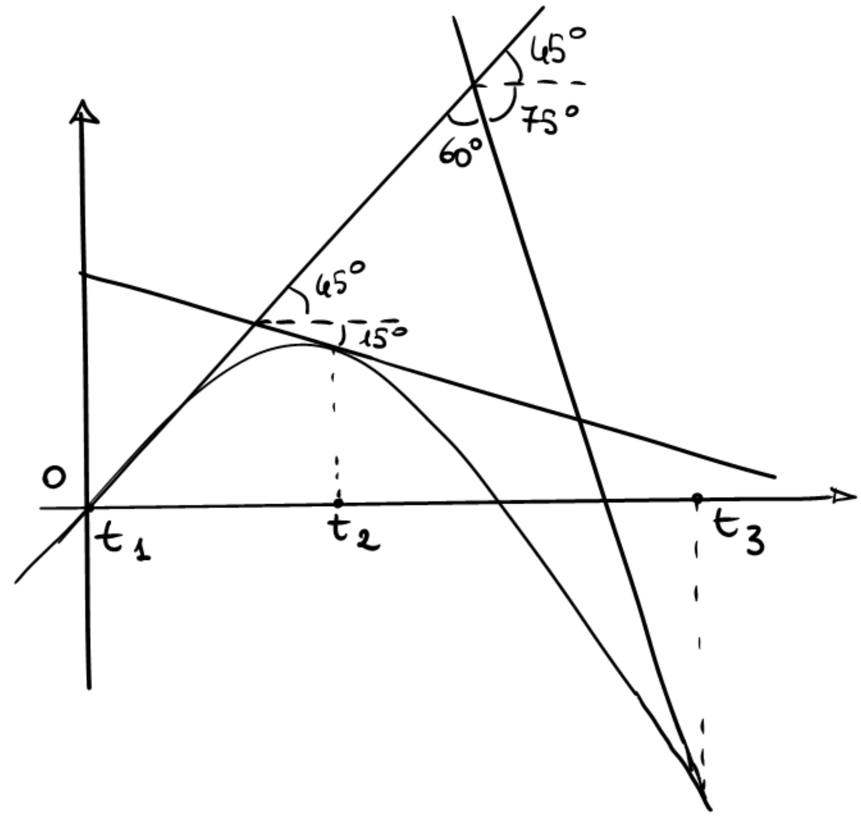
$1 \qquad - - - \qquad \sqrt{\frac{3}{2}} \qquad + + +$

Quindi il valore minimo dell'area è

$$S\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) = \frac{2}{9}\,\frac{(3/2)^3}{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}.$$

$\square$

ii)



Dato che $f'(t) = 1 - t^2$, per il teo. dei valori intermedi $f'((1,+\infty)) = (-\infty, 0)$.

Quindi posto $t_1 = 0$, si ha $f'(t_1) = 1 = tg(45°)$, e $\exists\ 0 < t_2 < t_3$ tali che

$$f'(t_2) = tg(-15°) < 0 \quad e \quad f'(t_3) = tg(-75°) < 0.$$

$\square$

5. Calcolare $\liminf_{n\to+\infty}$ e $\limsup_{n\to+\infty}$ delle seguenti successioni definite per ricorrenza:

i) $x_0 = -2$ e $x_{n+1} = x_n^2 - 1$ per $n \geq 0$,

ii) $x_0 = 1/2$ e $x_{n+1} = x_n^2 - 1$ per $n \geq 0$.

Svolgimento: Sia $f(x) = x^2 - 1$.

i) $x_0 = -2 \xrightarrow{f} x_1 = 3 \xrightarrow{f} x_2 = 8$

Proviamo per induzione che $x_n > n$ per $n \geq 2$.

$P(2)$: $x_2 = 8 > 2$ ok. $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ per $n \geq 2$

$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n^2 - 1 \overset{P(n)}{>} n^2 - 1 \overset{?}{\geq} n+1$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 2 \overset{?}{\geq} 0 \Leftrightarrow (n+1)(n-2) \geq 0 \quad \text{ok}$$

Quindi, per confronto,

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \limsup_{n\to+\infty} x_n = +\infty. \qquad \square$$

ii) $x_0 = \frac{1}{2} \xrightarrow{f} x_1 = -\frac{3}{4} \in [-1, 0]$

Ora si nota che $f([-1,0]) = [-1,0]$ e dunque $x_n \in [-1,0]$ per ogni $n \geq 1$.

Posto

$$g(x) = f(f(x)) = (x^2-1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2$$

si ha che

$$g(x) - x = x^4 - 2x^2 - x = x(x+1)(x^2 - x + 1).$$

Quindi $g(x)=x \iff x\in\{-1,0,\alpha,\beta\}$ e

$$-1<g(x)<x \quad \text{per } x\in(-1,\beta)$$

$$x<g(x)<0 \quad \text{per } x\in(\beta,0)$$

dove $\alpha=\frac{1+\sqrt5}{2}\simeq 1.618$ e $\beta=\frac{1-\sqrt5}{2}\simeq -0.618$.

Così

$$-1<x_1=-\frac34<\beta \Rightarrow x_1>g(x_1)=x_3>g(x_3)=x_5\ \cdots\ >-1$$

ossia $\{x_{2n+1}\}_{n\geq 0}$ è una succ. strettamente decrescente e limitata inferiormente da -1.

Dunque $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n+1}=L\in[-1,\beta)$ e

$$L=\lim_{n\to+\infty}x_{2n+1}=\lim_{n\to+\infty}g(x_{2n-1})=g(L)$$

da cui $L=-1$.

In modo analogo si vede che $\{x_{2n}\}_{n\geq1}$ è una successione strettamente crescente che tende a 0.

Si può così concludere che

$$\liminf_{n\to+\infty}x_n=-1 \quad e \quad \limsup_{n\to+\infty}x_n=0. \qquad \square$$