Prova scritta di Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

26 gennaio 2015

1. Siano $A = \{z \in \mathbb{C} : |z+3i|^2 \geq 3|z|^2+1\}$ e $B = \{z \in \mathbb{C} : |z^4+i| = |z^4-i|\}$.

i) Rappresentare nel piano complesso l'insieme $A \cap B$.

ii) Trovare un polinomio di secondo grado $P(z)$ che sia iniettivo in A.

2. Calcolare il seguente limite al variare di $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1-x^3) + a \ln|x|}{2x + \sqrt{2x^2 + \sqrt{4x^4+2}}}.$$

3. Rispondere alle seguenti domande.

i) Per quali $a > 1$ si ha che $\forall x \in (0, +\infty), \quad \log_a(x) < x < a^x$?

ii) Per quali $x > 0$ si ha che $\forall a \in (1, +\infty), \quad \log_a(x) < x < a^x$?

4. Per $t \in \mathbb{R}$ sia $L(t)$ la retta tangente in $(t, f(t))$ al grafico del polinomio

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3}.$$

i) Per $t > 1$ la retta $L(t)$ interseca l'asse x in un punto A e l'asse y in un punto B. Qual è il valore minimo dell'area del triangolo AOB dove O indica l'origine?

ii) Esistono tre numeri reali distinti t_1, t_2 e t_3 tali che le rette $L(t_1)$, $L(t_2)$ e $L(t_3)$ si intersecano a due a due e i tre punti di intersezione individuano un triangolo equilatero?

5. Calcolare $\liminf\limits_{n \to +\infty}$ e $\limsup\limits_{n \to +\infty}$ delle seguenti successioni definite per ricorrenza:

i) $x_0 = -2$ e $x_{n+1} = x_n^2 - 1$ per $n \geq 0$,

ii) $x_0 = 1/2$ e $x_{n+1} = x_n^2 - 1$ per $n \geq 0$.