Prova scritta di Analisi Matematica I - C. L. in Matematica - 15 settembre 2014

Nome e cognome: $\sqcup\!\!\sqcup$

---

1. Per $M \in \mathbb{R}$ si consideri l'insieme

$$D_M = \left\{ z \in \mathbb{C} \; : \; |z+i|^2 \leq M(|z|^2+1) \right\}.$$

i) Determinare al variare di $M \in \mathbb{R}$ la cardinalità dell'insieme

$$D_M \cap \left\{ z \in \mathbb{C} \; : \; z^3 = i \right\}.$$

ii) Per quali valori di M, $D_M = \mathbb{C}$?

Svolgimento:

i) Le soluzioni di $z^3 = i$ sono $-i$, $\pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$.

$i \in D_M \iff 0 = |-i+i|^2 \leq M \cdot 2 \iff M \geq 0$

$\pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \in D_M \iff \left|\pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} + i\right|^2 \leq M \cdot 2 \iff \frac{3}{4} + \frac{9}{4} \leq 2M$

$\iff M \geq \frac{3}{2}$

Quindi la cardinalità dell'insieme richiesto è

0 se $M < 0$, 1 se $0 \leq M < \frac{3}{2}$, 3 se $M \geq \frac{3}{2}$. $\square$

ii) Se $z = i$ allora $4 = |2i|^2 \leq M \cdot 2 \Rightarrow M \geq 2$.

Se $M = 2$ e $z = x + iy \in \mathbb{C}$ allora

$|z+i|^2 \leq 2(|z|^2+1)$, $\quad x^2 + (y+1)^2 \leq 2(x^2+y^2+1)$,

ossia $x^2 + (y-1)^2 \geq 0$ da cui $D_2 = \mathbb{C}$

Se $M \geq 2$ allora $\mathbb{C} = D_2 \subseteq D_M$. Infatti.

$z \in D_2 \Rightarrow |z+i|^2 \leq 2(|z|^2+1) \leq M(|z|^2+1) \Rightarrow z \in D_M$.

Quindi $D_M = \mathbb{C}$ se e solo se $M \geq 2$. $\square$

2. Sia $f(x) = \dfrac{1}{x-1+\sqrt{x^2-2x-a}}$.

i) Determinare, al variare di $a>0$, l'eventuale asintoto di f per $x \to -\infty$.

ii) Determinare un valore di $a>0$ tale che, per qualche $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\forall x \in (-\infty, x_0), \qquad f(x) > \frac{1}{\ln(x^2) - 2\ln(1-x)}.$$

Svolgimento:

i) Razionalizzando si ha che

$$f(x)\cdot \frac{x-1-\sqrt{x^2-2x-a}}{x-1-\sqrt{x^2-2x-a}} = \frac{x-1-\sqrt{x^2-2x-a}}{\cancel{x^2}-\cancel{2x}+1-\cancel{x^2}+\cancel{2x}+a}$$

$$= \frac{1}{a+1}\left(x-1-|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{a}{x^2}}\right) \underset{x<0}{=} \frac{1}{a+1}\left(x-1+x\cdot\left(1+\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{x}\right)+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{a+1}\left(2x-2+o(1)\right) \qquad \sqrt{1+t} = 1+\frac{1}{2}t+o(t)$$

Quindi l'asintoto per $x \to -\infty$ è $y = \dfrac{2x-2}{a+1}$.

$\square$

ii) Sia $g(x) = \dfrac{1}{\ln(x^2)-2\ln(1-x)} \overset{x<0}{=} \dfrac{1}{2(\ln(-x)-\ln(1-x))}$

$$= \frac{1}{-2\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)} \implies g(x)<0 \text{ per } x<0.$$

Allora per $x<0$ $\quad f(x) > g(x) \iff \dfrac{f(x)}{g(x)} < 1$.

Dunque, per definizione di limite, basta cercare un valore di a tale che $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} < 1$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-2+o(1)}{a+1}\cdot \underbrace{\left(-2\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)}_{2/x+o(1/x)} = \frac{4}{a+1}$$

e $\dfrac{4}{a+1} < 1$ se $a>3$. Quindi uno dei valori richiesti è ad esempio $a=4$.

$\square$

3. Sia $\{x_n\}_{n\geq 1}$ una successione di numeri reali e sia $f(x) = x(1 - xe^{-x})$.
Dimostrare o confutare le seguenti proposizioni.

i) Se $x_1 > 0$ e $x_{n+1} = f(x_n)$ per ogni $n \geq 1$, allora $\{x_n\}_{n\geq 1}$ è limitata.

ii) Se $x_1 > 0$ e $x_n = f(x_{n+1})$ per ogni $n \geq 1$, allora $\{x_n\}_{n\geq 1}$ è limitata.

Svolgimento: Osserviamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x - \underbrace{x^2 e^{-x}}_{>0} < x.$$

Inoltre se $x > 0$ allora $f(x) > 0$ perché $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ e f è strettamente crescente in $(0, +\infty)$

$$f'(x) = 1 - 2xe^{-x} + x^2 e^{-x} = \underbrace{(x-1)^2 e^{-x}}_{\geq 0} + \underbrace{1 - e^{-x}}_{>0} > 0.$$

i) Se $x_1 > 0$ allora $0 < x_{n+1} = f(x_n) < x_n$ quindi $\{x_n\}_{n\geq 1}$ è limitata perché contenuta nell'intervallo $(0, x_1]$.

$\square$

ii) Se $x_1 > 0$ allora $0 < x_n = f(x_{n+1}) < x_{n+1}$ e $\{x_n\}_{n\geq 1}$ è strettamente crescente e positiva.
Se fosse limitata allora

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \sup_{n\geq 1} x_n = \ell \in \mathbb{R}^+$$

e per continuità

$$f(\ell) = \lim_{n\to+\infty} f(x_{n+1}) = \lim_{n\to+\infty} x_n = \ell$$

che contraddice il fatto che $f(x) < x$ per $x > 0$.
Quindi $\{x_n\}_{n\geq 1}$ non è limitata.

$\square$

4. Rispondere alle seguenti domande.

i) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}^+$ si ha che $\forall x \in [0, \pi/2]$, $(\sin(x))^\alpha \geq \sin(\alpha x)$?

ii) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}^+$ si ha che $\forall x \in [0, \pi/2]$, $(\cos(x))^\alpha \leq \cos(\alpha x)$?

Svolgimento:

i) Se $\alpha > 1$ e $x = \pi/2\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ allora

$$\operatorname{sen}^\alpha(x) < 1 = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(\alpha x).$$

Se $0 < \alpha \leq 1$ e $x \in [0, \pi/2]$ allora

$$(\operatorname{sen}(x))^\alpha \underset{\substack{\uparrow \\ t^\alpha \geq t \\ \text{per } t \in [0,1]}}{\geq} \operatorname{sen}(x) \underset{\substack{\uparrow \\ 0 \leq \alpha x \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ e } \operatorname{sen} x \text{ è crescente} \\ \text{in } [0, \pi/2]}}{\geq} \operatorname{sen}(\alpha x)$$

Quindi la disuguaglianza vale per $\alpha \in (0, 1]$. $\square$

ii) Se $\alpha > 1$ e $x = \pi/2\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ allora

$$\cos^\alpha(x) > 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha x).$$

Sia ora $0 < \alpha \leq 1$ e poniamo

$$f(x) = \cos(\alpha x) - (\cos(x))^\alpha.$$

Si ha che $f(0) = 0$ e per $x \in [0, \frac{\pi}{2})$

$$f'(x) = -\operatorname{sen}(\alpha x) \cdot \alpha - \alpha (\cos(x))^{\alpha - 1}(-\operatorname{sen} x)$$
$$= \alpha \left(\underbrace{(\cos x)^{\alpha-1}}_{\geq 1} \cdot \operatorname{sen} x - \underbrace{\operatorname{sen}(\alpha x)}_{\leq \operatorname{sen}(x)} \right) \geq 0$$

Così $f(x) \geq 0$ in $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Quindi la disuguaglianza vale per $\alpha \in (0, 1]$. $\square$

5. Per ogni $a \in \mathbb{R}$, determinare quante sono le rette distinte passanti per l'origine e tangenti al grafico della funzione $f(x) = 1 - x^2(a + x^2)$.

Svolgimento: La retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ è

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
$$= (-2ax_0 - 4x_0^3)(x - x_0) + 1 - x_0^2(a + x_0^2).$$

Imponendo il passaggio per $(0,0)$ si ottiene che

$$0 = 2ax_0^2 + 4x_0^4 + 1 - ax_0^2 - x_0^4$$

ovvero $3x_0^4 + ax_0^2 + 1 = 0$.

Ora contiamo le soluzioni x_0 distinte.

Notiamo che per $a \geq 0$ non ci sono soluzioni e che $x_0 = 0$ non è una soluzione.

Sia $x_0^2 = t > 0$ allora $3t^2 + at + 1 = 0$ e $t = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 12}}{6}$.

Quindi:

1) se $a^2 < 12 \lor a \geq 0$ ossia $a > -2\sqrt{3}$ allora non ci sono soluzioni,
2) se $a^2 = 12 \land a < 0$ ossia $a = -2\sqrt{3}$ allora ci sono 2 soluzioni $x_0 = \pm\sqrt{2\sqrt{3}/6} = \pm 1/\sqrt[4]{3}$,
3) se $a^2 > 12 \land a < 0$ ossia $a < -2\sqrt{3}$ allora ci sono 4 soluzioni $x_0 = \pm\sqrt{\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 12}}{6}}$.

Dato che le rette tangenti per l'origine sono del tipo $y = mx$ con $m = -2x_0(a + 2x_0^2)$ si verifica che effettivamente ad ogni soluzione x_0 corrisponde una e una sola retta tangente.

$\square$