Prova scritta di Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"
15 settembre 2014

1. Per $M \in \mathbb{R}$ si consideri l'insieme

$$D_M = \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ |z+i|^2 \leq M(|z|^2+1) \right\}.$$

i) Determinare al variare di $M \in \mathbb{R}$ la cardinalità dell'insieme

$$D_M \cap \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ z^3 = i \right\}.$$

ii) Per quali valori di M, $D_M = \mathbb{C}$?

2. Sia $f(x) = \dfrac{1}{x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x - a}}$.

i) Determinare, al variare di $a > 0$, l'eventuale asintoto di f per $x \to -\infty$.

ii) Determinare un valore di $a > 0$ tale che, per qualche $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\forall x \in (-\infty, x_0), \qquad f(x) > \frac{1}{\ln(x^2) - 2\ln(1-x)}.$$

3. Sia $\{x_n\}_{n\geq 1}$ una successione di numeri reali e sia $f(x) = x(1 - xe^{-x})$.
Dimostrare o confutare le seguenti proposizioni.

i) Se $x_1 > 0$ e $x_{n+1} = f(x_n)$ per ogni $n \geq 1$, allora $\{x_n\}_{n\geq 1}$ è limitata.

ii) Se $x_1 > 0$ e $x_n = f(x_{n+1})$ per ogni $n \geq 1$, allora $\{x_n\}_{n\geq 1}$ è limitata.

4. Rispondere alle seguenti domande.

i) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}^+$ si ha che $\forall x \in [0, \pi/2]$, $(\sin(x))^\alpha \geq \sin(\alpha x)$?

ii) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}^+$ si ha che $\forall x \in [0, \pi/2]$, $(\cos(x))^\alpha \leq \cos(\alpha x)$?

5. Per ogni $a \in \mathbb{R}$, determinare quante sono le rette distinte passanti per l'origine e tangenti al grafico della funzione $f(x) = 1 - x^2(a + x^2)$.