Prova scritta di Analisi Matematica I - C. L. in Matematica - 29 luglio 2014

Nome e cognome: |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

---

1. Siano $A = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z+1-i| \le 3\}$ e $B = \{w \in \mathbb{C} \,:\, |w-3-4i| \le 4\}$.

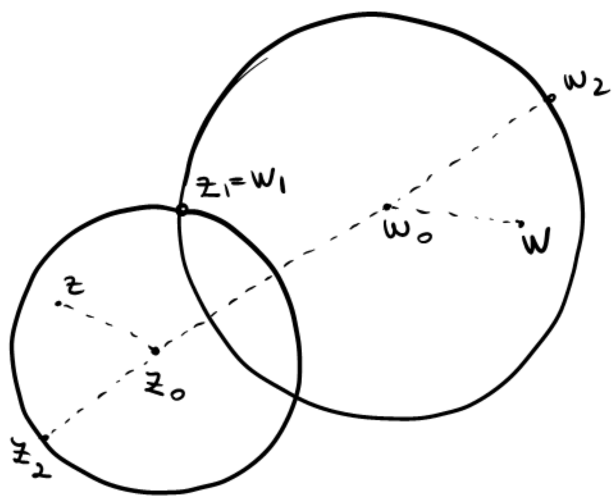
i) Calcolare

$$M = \max\{|z-w| : z \in A, w \in B\} \quad \text{e} \quad m = \min\{|z-w| : z \in A, w \in B\}.$$

ii) Determinare $z_1 \in A$ e $w_1 \in B$ tali che $|z_1 - w_1| = m$.

iii) Determinare $z_2 \in A$ e $w_2 \in B$ tali che $|z_2 - w_2| = M$.

Svolgimento: A è il cerchio di centro $z_0 = -1+i$ e raggio 3, mentre B è il cerchio di centro $w_0 = 3+4i$ e raggio 4.



Dato che

$$|z_0 - w_0| = |-1+i-3-4i| = |-4-3i| = \sqrt{4^2+3^2} = 5 < 3+4$$

allora $A \cap B \neq \emptyset$ e quindi $m = 0$ e possiamo prendere $z_1 = w_1 \in A \cap B$. Ad esempio $z_1 = w_1 = -1+4i$

$$|z_1 - z_0| = |4i - i| = 3 \quad \text{e} \quad |w_1 - w_0| = |-1-3| = 4.$$

Notiamo che se $z \in A$ e $w \in B$ allora

$$|z-w| \leq |z-z_0| + |z_0 - w_0| + |w - w_0| \leq 3+5+4 = 12$$

quindi $M \leq 12$.

Inoltre se

$$z_2 = z_0 - \frac{w_0 - z_0}{|w_0 - z_0|} \cdot 3 = -1+i - \frac{4+3i}{5} \cdot 3 = \frac{-17-4i}{5} \in A$$

e

$$w_2 = w_0 + \frac{w_0 - z_0}{|w_0 - z_0|} \cdot 4 = 3+4i + \frac{4+3i}{5} \cdot 4 = \frac{31+32i}{5} \in B$$

possiamo verificare che

$$|z_2 - w_2| = \frac{1}{5} \left| 31+32i+17+4i \right| = \frac{12}{5} |4+3i| = 12$$

e dunque $M = 12$. $\square$

2. Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x^\alpha + x - 1) - 4x + 4}{(x^2-1)^2}.$$

Svolgimento: Sia $x = t+1$ allora $t \to 0^+$ e

$$\frac{\ln\left((t+1)^\alpha + t\right) - 4t}{\left((t+1)^2 - 1\right)^2} = \frac{\ln\left(1 + (\alpha+1)t + o(t)\right) - 4t}{(t^2+2t)^2}$$

$$= \frac{(\alpha+1)t + o(t) - 4t}{4t^2 + o(t^2)} = \frac{(\alpha-3)t + o(t)}{4t^2 + o(t^2)} \begin{cases} \xrightarrow{\alpha>3} +\infty \\ \xrightarrow{\alpha<3} -\infty \end{cases}.$$

Se $\alpha = 3$ avrei $\frac{o(t)}{4t^2}$ che non è sufficiente per continuare.

Per $\alpha = 3$ ragioniamo diversamente

$$\lim_{x\to 1^+} \dots \overset{H}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{3x^2+1}{x^3+x-1} - 4}{2(x^2-1)\cdot 2x}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{-4x^3+3x^2-4x+5}{(x^2-1)} \cdot \frac{1}{4x(x^3+x-1)} \right)$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{-12x^2+6x-4}{2x} \cdot \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{4x(x^3+x-1)}$$

$$= -\frac{10}{2}\cdot\frac{1}{4} = -\frac{5}{4}.$$

$\square$

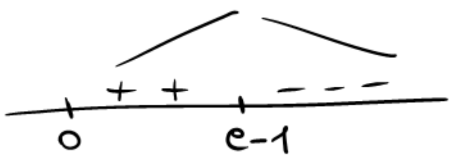
3. Determinare dei numeri reali m e q, tali che per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\ln(1+2|x|+x^2)}{1+|x|} + x < mx + q < 9x^2 - 5x + 2.$$

Svolgimento: Sia $f(x) = \dfrac{\ln(1+2|x|+x^2)}{1+|x|} = \dfrac{2\ln(1+|x|)}{1+|x|}$ per $x \in \mathbb{R}$.

f è pari e per $x \geq 0$

$$f'(x) = 2\left(\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}\right) = \frac{2(1-\ln(1+x))}{(1+x)^2}.$$

così 

e quindi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) \leq f(e-1) = \frac{2}{e}.$$

Allora, ponendo $m=1$ e per $q > \frac{2}{e}$ abbiamo che

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + x < x + q.$$

Ora vediamo quando vale l'altra disuguaglianza

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x + q < 9x^2 - 5x + 2$$

ossia $9x^2 - 6x + 2 - q > 0$. Questo accade se

$$0 > \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 9 (2-q) = 36(q-1) \iff q < 1.$$

Dunque basta scegliere q in modo che $\frac{2}{e} < q < 1$.

Ad esempio $q = \dfrac{\frac{2}{e}+1}{2} = \dfrac{2+e}{2e}$.

$\square$

4. Dimostrare o confutare le seguenti proposizioni.

i) Esiste un insieme numerabile $A \subset \mathbb{R}$ tale che $\overline{A} \setminus A = \mathbb{Z}$.

ii) Sia $B = \left\{ \frac{n}{2^k} \ : \ n \in \mathbb{Z} \, , \ k \in \mathbb{N} \right\}$, allora $\overline{B} = \mathbb{R}$.

Svolgimento:

i) VERO. Ad esempio $A = \left\{ n + \frac{1}{2^k} \ : \ n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}^+ \right\}$.

A è in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+$ dunque è numerabile. Inoltre gli elementi di A sono tutti isolati e ogni $n \in \mathbb{Z}$ è un punto di accumulazione di A (perché $\lim_{k \to +\infty} \left(n + \frac{1}{2^k}\right) = n$).

Infine $\mathbb{Z} \cap A = \phi$.

Quindi $\overline{A} = A \cup \mathbb{Z}$ e $\overline{A} \setminus A = (A \cup \mathbb{Z}) \cap A^c = \mathbb{Z}$.

ii) VERO. Basta far vedere che $\forall a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, esiste $\frac{n}{2^k} \in B$ tale che $a < \frac{n}{2^k} < b$.

Dato che $\lim_{k \to +\infty} (b-a) \cdot 2^k = +\infty$, esiste $k \in \mathbb{N}^+$ tale che $2^k(b-a) > 1$, ossia l'intervallo $(2^k a, 2^k b)$ ha ampiezza > 1 e dunque tale intervallo contiene almeno un intero $n \in \mathbb{Z}$

$$2^k a < n < 2^k b \iff a < \frac{n}{2^k} < b.$$

$\square$

5. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[0,1]$ e derivabile in $(0,1)$ tale che $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$.

i) Esistono due punti distinti $x_1, x_2 \in (0,1)$ tali che $f'(x_1) = f'(x_2) = 1$?

ii) Esistono due punti distinti $x_1, x_2 \in (0,1)$ tali che $f'(x_1) + f'(x_2) = 2$?

Svolgimento:

i) L'esistenza di almeno un punto $x_1 \in (0,1)$ tale che $f'(x_1) = 1$ è garantita dal teorema di Lagrange, ma non sempre ne esistono due distinti. Ad esempio se $f(x) = x^2$ allora $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e $f'(x) = 2x = 1 \iff x = \frac{1}{2}$.

$\square$

ii) La proprietà vale. Per il teorema di Lagrange

$$\exists x_1 \in \left(0, \tfrac{1}{2}\right) : \quad f'(x_1) = \frac{f(\frac{1}{2}) - f(0)}{\frac{1}{2} - 0} = 2f\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

e

$$\exists x_2 \in \left(\tfrac{1}{2}, 1\right) : \quad f'(x_2) = \frac{f(1) - f(\frac{1}{2})}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - 2f\left(\tfrac{1}{2}\right).$$

Quindi $x_1 \neq x_2$ e

$$f'(x_1) + f'(x_2) = 2\cancel{f\left(\tfrac{1}{2}\right)} + 2 - 2\cancel{f\left(\tfrac{1}{2}\right)} = 2.$$

$\square$