Prova scritta di Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"
29 luglio 2014

1. Siano $A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z + 1 - i| \leq 3\}$ e $B = \{w \in \mathbb{C} \ : \ |w - 3 - 4i| \leq 4\}$.

i) Calcolare
$$M = \max\{|z-w| : z \in A, w \in B\} \quad \text{e} \quad m = \min\{|z-w| : z \in A, w \in B\}.$$

ii) Determinare $z_1 \in A$ e $w_1 \in B$ tali che $|z_1 - w_1| = m$.

iii) Determinare $z_2 \in A$ e $w_2 \in B$ tali che $|z_2 - w_2| = M$.

2. Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$,
$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\ln(x^\alpha + x - 1) - 4x + 4}{(x^2 - 1)^2}.$$

3. Determinare dei numeri reali m e q, tali che per ogni $x \in \mathbb{R}$,
$$\frac{\ln(1 + 2|x| + x^2)}{1 + |x|} + x < mx + q < 9x^2 - 5x + 2.$$

4. Dimostrare o confutare le seguenti proposizioni.

i) Esiste un insieme numerabile $A \subset \mathbb{R}$ tale che $\overline{A} \setminus A = \mathbb{Z}$.

ii) Sia $B = \left\{ \dfrac{n}{2^k} \ : \ n \in \mathbb{Z} \ , \ k \in \mathbb{N} \right\}$, allora $\overline{B} = \mathbb{R}$.

5. Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[0, 1]$ e derivabile in $(0, 1)$ tale che $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$.

i) Esistono due punti distinti $x_1, x_2 \in (0, 1)$ tali che $f'(x_1) = f'(x_2) = 1$?

ii) Esistono due punti distinti $x_1, x_2 \in (0, 1)$ tali che $f'(x_1) + f'(x_2) = 2$?