Prova scritta di Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"
25 giugno 2014

1. Determinare una funzione $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ della forma $F(z) = az + b$ con $a, b \in \mathbb{C}$ tale che

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad F(F(F(z))) = 2(i-1)z + 13.$$

2. Calcolare i seguenti limiti

$$\text{i)} \lim_{n\to+\infty} (2 - \sqrt[n]{2})^n, \qquad\qquad \text{ii)} \lim_{x\to\pi/4} \frac{\cos(2x) \cdot (\sin(x) - \cos(x))}{(\ln(\tan(x)))^2}.$$

3. Dimostrare o confutare le seguenti proposizioni.

i) Per ogni $n \geq 1$ e per ogni $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numeri reali positivi tali che il loro prodotto è uguale a 1, vale la disuguaglianza

$$2^n \leq (1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n).$$

ii) Per ogni $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ numeri reali positivi tali che il loro prodotto è uguale a 1, vale la disuguaglianza

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_{10}) \leq 10^{10}.$$

4. Considerare le seguenti questioni.

i) Determinare una successione di numeri reali $\{a_n\}_{n\geq 1}$ tale che

$$\forall n \geq 1, \ \ \forall x \in [a_n, +\infty), \qquad x^n \leq e^x.$$

ii) Esiste una successione $\{a_n\}_{n\geq 1}$ come in i), tale che $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = L \in \mathbb{R}^+$?

5. Rispondere alle seguenti domande.

i) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ una funzione derivabile due volte in $\mathbb{R}$. Se la funzione $\ln(f)$ è convessa in $\mathbb{R}$ allora anche la funzione f è convessa in $\mathbb{R}$?

ii) Esiste un polinomio di secondo grado $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tale che la funzione $\ln(P)$ è convessa in $\mathbb{R}$?