Prova scritta di Analisi Matematica I - C. L. in Matematica - 29 gennaio 2014

Nome e cognome: |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

---

1. Sia $P(z) = 2iz^2 + z$ per $z \in \mathbb{C}$ e si considerino gli insiemi:

$$A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\} \quad \text{e} \quad B = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |\text{Im}(z - i)| = 3\}.$$

i) Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore degli insiemi

$$\{|P(z)| \ : \ z \in A\} \quad \text{e} \quad \{|P(z)| \ : \ z \in B\}.$$

ii) La funzione P è iniettiva in A? La funzione P è iniettiva in B?

Svolgimento:

i) $z \in A \iff z = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ con $\theta \in \mathbb{R}$.

Così $|P(z)| = |z|\,|2iz+1| = |(1-2\operatorname{sen}\theta) + 2i\cos\theta|$

$$= \left((1-2\operatorname{sen}\theta)^2 + 4\cos^2\theta\right)^{1/2} = \sqrt{5-4\operatorname{sen}\theta}$$

Dato che $\operatorname{sen}\theta$ varia in $[-1,1]$ si ottiene che

$$\sup\{|P(z)| : z \in A\} = \sqrt{5+4} = 3,$$

$$\inf\{|P(z)| : z \in A\} = \sqrt{5-4} = 1.$$

Inoltre $z \in B \iff \text{Im}(z) = 4 \vee \text{Im}(z) = -2 \iff z = t + 4i$ $\vee$ $z = t - 2i$ con $t \in \mathbb{R}$. Così

$$|P(z)| = \begin{cases} |P(t+4i)| = |t+4i|\,|-7+2it| = \sqrt{t^2+16}\cdot\sqrt{49+4t^2} \\ |P(t-2i)| = |t-2i|\,|5+2it| = \sqrt{t^2+4}\,\sqrt{25+4t^2} \end{cases}$$

Dato che $t \to \sqrt{c_1 + c_2 t^2}$ con $c_1, c_2 > 0$ assume valore minimo per $t=0$ e non è superiormente limitata si ha che

$$\sup\{|P(z)| : z \in B\} = +\infty$$

$$\inf\{|P(z)| : z \in B\} = \min\{\sqrt{16}\cdot\sqrt{49}, \sqrt{4}\cdot\sqrt{25}\} = 10$$

$\square$

ii) $P(z) = P(w) \iff 2iz^2 + z - 2iw^2 - w = 0$

$\iff (z-w)(2i(z+w)+1) = 0$

Quindi se $z \neq w$ allora $P(z) = P(w)$ se e solo se

$$2i(z+w)+1 = 0 \quad \text{ossia} \quad z+w = -\frac{1}{2i} = \frac{i}{2}.$$

Allora P non è iniettiva in A perché

$$z = \frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{i}{4} \in A, \quad w = -\frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{i}{4} \in A, \quad z \neq w$$

e $z+w = \frac{i}{2}$.

P invece è iniettiva in B perché se $z, w \in B$ allora $\operatorname{Im}(z+w) \in \{4+4, -2-2, 4-2\} = \{16, -4, 2\}$ mentre $z \neq w$, $P(z) = P(w)$ implica che

$$z+w = \frac{i}{2} \Rightarrow \operatorname{Im}(z+w) = \frac{1}{2}.$$

$\square$

2. Calcolare i seguenti limiti

$$\text{i)} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\arctan(x)}{\pi}\right)^{\pi x}, \qquad \text{ii)} \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-3}}+x^2\sin\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)\right).$$

Svolgimento: i) Dato che

$$\left(\frac{2\,\mathrm{arctg}\,x}{\pi}\right)^{\pi x} = \exp\left(\pi\,\frac{\ln(2\,\mathrm{arctg}\,x)}{1/x}\right)$$

basta studiare il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2\,\mathrm{arctg}\,x)}{1/x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\cancel{2}\,\mathrm{arctg}\,x}\cdot\frac{\cancel{2}}{1+x^2}}{-1/x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{\mathrm{arctg}\,x}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) = -\frac{2}{\pi}\cdot 1 = -\frac{2}{\pi}$$

quindi il limite richiesto è $\exp\left(\pi\cdot\left(-\frac{2}{\pi}\right)\right) = e^{-2}$.

$\square$

ii) Sia $x=-1/t$ così $t=-\frac{1}{x}\to 0^+$ e

$$\left(\frac{-1/t^3}{-1/t-3}\right)^{1/2} + \frac{1}{t^2}\,\mathrm{sen}(-t-2t^2) =$$

$$= \frac{1}{t}(1+3t)^{-1/2} - \frac{1}{t^2}\,\mathrm{sen}(t+2t^2)$$

$$= \frac{1}{t}\left(1-\frac{3}{2}t+o(t)\right) - \frac{1}{t^2}\left(t+2t^2+o(t^2)\right)$$

$$= \cancel{\frac{1}{t}} - \frac{3}{2} + o(1) - \cancel{\frac{1}{t}} - 2 + o(1) \to -\frac{7}{2}$$

$\square$

3. Sia f una funzione derivabile in $[0, +\infty)$ tale che

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = L \in (0, +\infty).$$

i) Dimostrare o confutare che la funzione f ha un asintoto obliquo.

ii) Dimostrare o confutare che esistono $m \in (0, +\infty)$ e $q \in \mathbb{R}$ tali che

$$\forall x \in [0, +\infty), \quad f(x) \geq mx + q.$$

Svolgimento:

i) FALSO. Ad esempio se $f(x) = x + \ln(1+x)$ allora $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{1+x} = 1$, ma f non ha un asintoto obliquo perché

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = m, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) - x = +\infty.$$

$\square$

ii) VERO. Sia $m = \frac{L}{2} = \varepsilon > 0$ allora per definizione di limite $\exists\, x_0 > 0$ tale che

$$\forall t \geq x_0, \quad f'(t) > L - \varepsilon = \frac{L}{2} = m$$

e per il teorema del valor medio se $x > x_0$ allora

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(t) > m$$

per qualche $t > x_0$. Da cui

$$f(x) > m(x - x_0) + f(x_0) = mx + (f(x_0) - m x_0) \quad (*)$$

per ogni $x > x_0$.

Dato che $x \to f(x) - mx$ è una funzione continua, assume un valore minimo q nell'insieme chiuso e limitato $[0, x_0]$. Allora $(f(x_0) - mx_0) \geq q$ e per $(*)$ si ha

$$\forall x \in [0, +\infty), \quad f(x) \geq mx + q.$$

$\square$

4. Siano m e n numeri interi positivi.

i) Dimostrare che se f e g sono due funzioni derivabili n volte in (a,b), allora

$$\forall x \in (a,b), \quad (f\cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

ii) Se $h(x) = x^m e^x$, quanto vale $h^{(n)}(0)$?

Svolgimento: i) Verifichiamo l'identità $P(n)$ per induzione. $P(1)$:

$$(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} f^{(k)}(x) g^{(1-k)}(x).$$

Passo induttivo $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ per $n \geq 1$.

$$(f\cdot g)^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}\left((f\cdot g)^{(n)}(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x)$$

$$= f^{(n+1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)}_{=\binom{n+1}{k}} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) + g^{(n+1)}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x). \qquad \square$$

ii) Posto $f(x) = x^m$ e $g(x) = e^x$, allora

$$(x^m)^{(k)} = \begin{cases} m \cdots (m-k+1)\, x^{m-k} & \text{se } 1 \leq k \leq m \\ 0 & \text{se } m < k \end{cases}$$

$$(e^x)^{(n-k)} = e^x$$

e dunque per i) si ha che

$$h^{(n)}(x) = e^x \sum_{k=0}^{\min(n,m)} \binom{n}{k} m \cdots (m-k+1)\, x^{m-k}$$

Posto $x = 0$ si annullano tutti gli addendi tranne quello per $k = m$. Quindi

$$h^{(n)}(0) = \begin{cases} \binom{n}{m} \cdot m! & \text{se } m \leq n, \\ 0 & \text{se } 1 \leq n < m. \end{cases}$$

$\square$

5. Risolvere i seguenti problemi.

i) Determinare due rette tra loro ortogonali in modo che una sia tangente al grafico di e^x e l'altra sia tangente al grafico di $-x^2$.

ii) Dimostrare che esistono $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ tali che la retta tangente al grafico di e^x in x_0 è anche tangente al grafico di $-x^2$ in x_1.

Svolgimento: La retta tangente in x_0 a e^x è

$$y = e^{x_0}(x-x_0)+e^{x_0} = e^{x_0}x + e^{x_0}(1-x_0)$$

mentre la retta tangente in x_1 a $-x^2$ è

$$y = -2x_1(x-x_1)-x_1^2 = -2x_1 \cdot x + x_1^2$$

i) Le rette sono ortogonali se e solo se il prodotto dei coefficienti angolari è uguale a -1: $\quad e^{x_0} \cdot (-2x_1) = -1$

Ad esempio per $x_0 = 0$ e $x_1 = \frac{1}{2}$. Così le due rette sono $\quad y = x+1 \quad$ e $\quad y = -x + \frac{1}{4}$.

ii) Le rette coincidono se e solo se

$$e^{x_0}x + e^{x_0}(1-x_0) = -2x_1 \cdot x + x_1^2$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ ossia se

$$\begin{cases} e^{x_0} = -2x_1 \\ e^{x_0}(1-x_0) = x_1^2 \end{cases}$$

Quindi ricavando $x_1 = -e^{x_0}/2$ dalla prima equazione e sostituendo nella seconda

$$\cancel{e^{x_0}}(1-x_0) = \frac{e^{\cancel{2}x_0}}{4}$$

$$e^{x_0} + 4(x_0-1) = 0$$

Così basta far vedere che la funzione

$$h(x) = e^x + 4(x-1)$$

ha almeno uno zero. h è continua in $\mathbb{R}$

$$h(0) = 1-4 = -3 < 0 \quad e \quad h(1) = e > 0$$

quindi per il teorema degli zeri h ha almeno uno zero $x_0 \in (0,1)$.

In conclusione tale tangente comune a e^x e $-x^2$ esiste.

$\square$