

Prova scritta di Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

29 gennaio 2014

1. Sia $P(z) = 2iz^2 + z$ per $z \in \mathbb{C}$ e si considerino gli insiemi:

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \quad \text{e} \quad B = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(z - i)| = 3\}.$$

i) Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore degli insiemi

$$\{|P(z)| : z \in A\} \quad \text{e} \quad \{|P(z)| : z \in B\}.$$

ii) La funzione P è iniettiva in A ? La funzione P è iniettiva in B ?

2. Calcolare i seguenti limiti

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \arctan(x)}{\pi} \right)^{\pi x}, \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-3}} + x^2 \sin \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) \right).$$

3. Sia f una funzione derivabile in $[0, +\infty)$ tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = L \in (0, +\infty).$$

i) Dimostrare o confutare che la funzione f ha un asintoto obliquo.

ii) Dimostrare o confutare che esistono $m \in (0, +\infty)$ e $q \in \mathbb{R}$ tali che

$$\forall x \in [0, +\infty), \quad f(x) \geq mx + q.$$

4. Siano m e n numeri interi positivi.

i) Dimostrare che se f e g sono due funzioni derivabili n volte in (a, b) , allora

$$\forall x \in (a, b), \quad (f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

ii) Se $h(x) = x^m e^x$, quanto vale $h^{(n)}(0)$?

5. Risolvere i seguenti problemi.

i) Determinare due rette tra loro ortogonali in modo che una sia tangente al grafico di e^x e l'altra sia tangente al grafico di $-x^2$.

ii) Dimostrare che esistono $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ tali che la retta tangente al grafico di e^x in x_0 è anche tangente al grafico di $-x^2$ in x_1 .