Prova scritta di Analisi Matematica I - C. L. in Matematica - 16 settembre 2013

Nome e cognome: └┴┴┴┴┴┴┴┴┴┴┴┴┴┴┴┴┴┴┴┴┴┴┴┘

---

1. Determinare un valore di $a \in \mathbb{R}$, tale che vale la seguente inclusione

$$\{z \in \mathbb{C} : |z-1| \geq a|z+1|\} \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}(z) - 1| \leq 7/4\}.$$

Svolgimento: Posto $z = x + iy$, si ha che

$$|\mathrm{Im}(z) - 1| \leq \frac{7}{4} \iff -\frac{3}{4} = 1 - \frac{7}{4} \leq y \leq 1 + \frac{7}{4} = \frac{11}{4}$$

Quindi l'insieme $S = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}(z) - 1| \leq 7/4$ è la "striscia" compresa tra le rette orizzontali $y = \frac{11}{4}$ e $y = -\frac{3}{4}$.

Sia ora $C_a = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \geq a|z+1|\}$.
Notiamo che per $a \leq 0$ $C_a = \mathbb{C}$ e che per $a = 1$, C_1 è il semipiano $\{\mathrm{Re}(z) \leq 0\}$. Inoltre se $a > a'$ allora $C_a \subseteq C_{a'}$. Quindi per avere $C_a \subseteq S$ è necessario supporre che $a > 1$. Ora posto $z = x + iy$, si ha che

$$|z-1| \geq a|z+1| \iff |z-1|^2 \geq a^2 |z+1|^2 \iff$$

$$(x-1)^2 + y^2 \geq a^2(x+1)^2 + a^2 y^2$$

$$0 \geq (a^2-1)x^2 + 2(a^2+1)x + (a^2-1)y^2 + (a^2-1).$$

Dato che $a > 1$

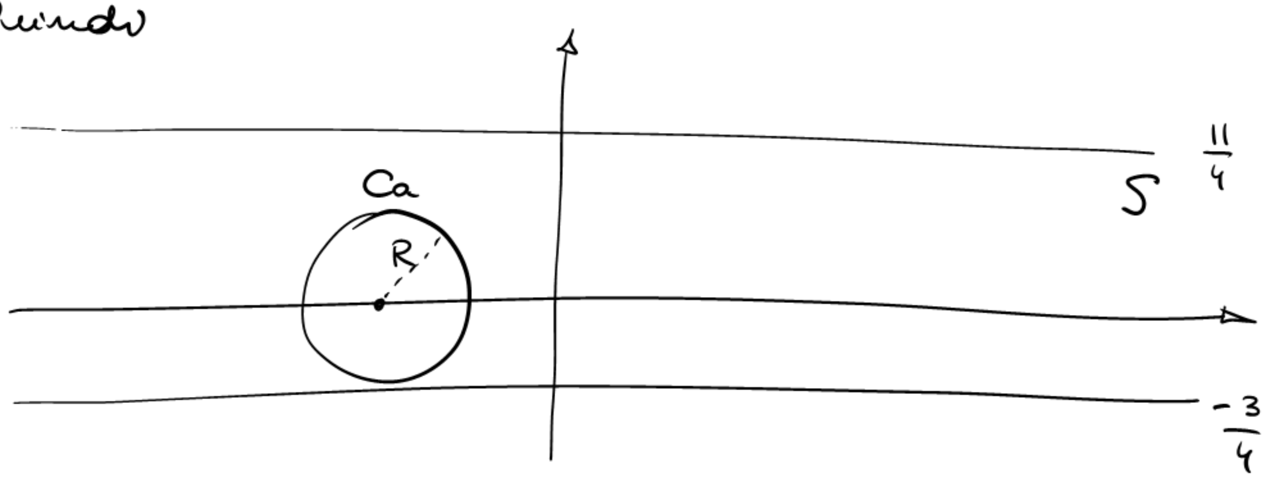
$$0 \geq x^2 + \frac{2(a^2+1)}{(a^2-1)}x + y^2 + 1$$

e completando il quadrato si ottiene

$$R^2 = \left(\frac{a^2+1}{a^2-1}\right)^2 - 1 \geq \left(x + \frac{a^2+1}{a^2-1}\right)^2 + y^2$$

che rappresenta il cerchio di centro $\left(-\frac{a^2+1}{a^2-1}, 0\right)$ e raggio $R = \frac{2a}{a^2-1}$.

Quindi



e possiamo concludere che $C_a \subseteq S$ se e solo se $a>1$ e $R = \frac{2a}{a^2-1} \leq \frac{3}{4}$ da cui

$$0 \leq 3a^2 - 8a - 3 = (3a+1)(a-3)$$

e quindi l'inclusione vale per ogni $a \geqslant 3$.

Prova scritta di Analisi Matematica I - C. L. in Matematica - 16 settembre 2013

Nome e cognome: └─┴─┘

---

2. Calcolare i seguenti due limiti:

i) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\cos(n)+\sin(n)}{\sqrt{3}}\right)^n,$

ii) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln(1+\sqrt{x^2+1})-\ln(x)}-\frac{1}{\ln(1+x)-\ln(x)}\right).$

Svolgimento: i) Notiamo che per $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x)+\mathrm{sen}(x) = \sqrt{2}\left(\frac{\cos(x)}{\sqrt{2}}+\frac{\mathrm{sen}(x)}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

e quindi $|\cos(x)+\mathrm{sen}(x)| \leq \sqrt{2}$. Così

$$0 \leq \left|\left(\frac{\cos(n)+\mathrm{sen}(n)}{\sqrt{3}}\right)^n\right| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^n \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \quad \text{perché } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \in (0,1).$$

Dunque, per confronto, il limite richiesto vale 0.

ii) Posto $x=\frac{1}{t}$ si ottiene che per $x\to+\infty$, $t\to 0^+$ e

$$\ldots = \frac{1}{\ln(t+\sqrt{1+t^2})} - \frac{1}{\ln(1+t)}$$

$$= \frac{1}{\ln\left(t+\left(1+\frac{1}{2}t^2+o(t^2)\right)\right)} - \frac{1}{\ln(1+t)}$$

$$= \frac{1}{\ln\left(1+\left(t+\frac{1}{2}t^2\right)+o(t^2)\right)} - \frac{1}{\ln(1+t)}$$

$$= \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}t^2\right)-\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}t^2\right)^2+o(t^2)} - \frac{1}{t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)}$$

$$= \frac{1}{t(1+o(t))} - \frac{1}{t\left(1-\frac{t}{2}+o(t)\right)} = \frac{1}{t}\left(1+o(t)-\left(1+\frac{t}{2}+o(t)\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{2}+o(1) \longrightarrow -\frac{1}{2}.$$

Quindi il limite richiesto vale $-\frac{1}{2}$.

Prova scritta di Analisi Matematica I - C. L. in Matematica - 16 settembre 2013

Nome e cognome: ⌊_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_⌋

---

3. Determinare per quali $m \in \mathbb{R}$ vale la seguente disuguaglianza per ogni $x \in [0, \pi/2)$,

$$2\sin(x) + \tan(x) \geq mx.$$

Svolgimento: Sia $f(x) = 2\mathrm{sen}(x) + \mathrm{tg}(x) - mx$.

Per quali $m \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2})$, $f(x) \geq 0$?

$f(0) = 0$ e per $x \in [0, \pi/2)$

$$f'(x) = 2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - m.$$

Notiamo che $f'(0) = 3 - m$.

Se $m > 3$ allora si ha che $f'(0) < 0$ e per il teorema di permanenza del segno (f' è continua) $f(x)$ è strettamente decrescente in un intorno destro di 0 e la disuguaglianza data non vale.

Se $m = 3$ allora per $x \in [0, \frac{\pi}{2})$

$$f'(x) = \frac{2\cos^3 x + 1 - 3\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\overbrace{(2\cos x + 1)}^{\geq 1}(\cos x - 1)^2}{\cos^2 x} \geq 0$$

e quindi la crescenza implica che $f(x) \geq f(0) = 0$.

Per $m < 3$ la disuguaglianza vale a maggior ragione perché per $x \in [0, \frac{\pi}{2})$

$$2\mathrm{sen}\,x + \mathrm{tg}\,x \geq 3x \geq mx.$$

Prova scritta di Analisi Matematica I - C. L. in Matematica - 16 settembre 2013

Nome e cognome: $\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

---

4. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b).
Se $f(a) = f(b) = 0$ allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = f'(x_0)$?

Svolgimento:

Posto $g(x) = e^{-x} f(x)$ si ha che $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, g è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b).

Inoltre $g(a) = e^{-a} f(a) = 0$ e $g(b) = e^{-b} f(b) = 0$ e per il teorema di Rolle $\exists\, x_0 \in (a,b)$ tale che

$$0 = g'(x_0) = -e^{-x_0} f(x_0) + e^{-x_0} f'(x_0) = 0$$
$$= e^{-x_0}\left(-f(x_0) + f'(x_0)\right).$$

Dato che $e^{-x_0} \neq 0$ si conclude che

$$f(x_0) = f'(x_0).$$

Prova scritta di Analisi Matematica I - C. L. in Matematica - 16 settembre 2013

Nome e cognome: ⌊_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_⌋

---

5. Dimostrare o confutare ciascuna delle seguenti proposizioni.

i) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione periodica di periodo $T > 0$ tale che l'equazione $f(x) = \cos(x)$ ha almeno una soluzione in $\mathbb{R}$ allora tale equazione ha infinite soluzioni reali.

ii) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione periodica di periodo $T > 0$ tale che $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - \cos(x)) = 0$ allora $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)$.

Svolgimento:

i) FALSA. Sia ad esempio $f(x) = 2 - \cos(\pi x)$.
f è una funzione periodica di periodo $T = 2$.
Dato che $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 1 \geq \cos x$, l'equazione
$f(x) = \cos x$ è equivalente a $\cos x = 1 = f(x)$.
Ma $\cos x = 1$ sse $x = 2\pi n$ per $n \in \mathbb{Z}$
e $f(x) = 1$ sse $\cos \pi x = 1$ sse $x = 2k$ per $k \in \mathbb{Z}$
Quindi $2\pi n = 2k$ sse $n = k = 0$ (π è irrazionale!)
ossia l'equazione $f(x) = \cos x$ ha un'unica soluzione.

ii) VERA. Sia $x \in \mathbb{R}$. Dato che $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$f(x) = f(x + nT) \quad e \quad \cos x = \cos(x + n2\pi)$$

Allora per ipotesi

$$\lim_{n\to+\infty}(f(x+nT) - \cos(x+nT)) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\cos(x+nT) = f(x)$$

$$\lim_{n\to+\infty}(f(x+n2\pi) - \cos(x+n2\pi)) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x+n2\pi) = \cos x$$

Così $0 = \lim_{n\to+\infty}(f(x+nT+n2\pi) - \cos(x+nT+n2\pi))$

$$= \lim_{n\to+\infty} f(x+n2\pi) - \lim_{n\to+\infty}\cos(x+nT) = \cos x - f(x)$$

e quindi $f(x) = \cos x$.