Prova scritta di Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

16 settembre 2013

1. Determinare un valore di $a \in \mathbb{R}$, tale che vale la seguente inclusione

$$\{z \in \mathbb{C} : |z-1| \geq a|z+1|\} \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}(z) - 1| \leq 7/4\}.$$

2. Calcolare i seguenti due limiti:

i) $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\cos(n) + \sin(n)}{\sqrt{3}} \right)^n,$

ii) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\ln(1+\sqrt{x^2+1}) - \ln(x)} - \frac{1}{\ln(1+x) - \ln(x)} \right).$

3. Determinare per quali $m \in \mathbb{R}$ vale la seguente disuguaglianza per ogni $x \in [0, \pi/2)$,

$$2\sin(x) + \tan(x) \geq mx.$$

4. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b).
Se $f(a) = f(b) = 0$ allora esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che $f(x_0) = f'(x_0)$?

5. Dimostrare o confutare ciascuna delle seguenti proposizioni.

i) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione periodica di periodo $T > 0$ tale che l'equazione $f(x) = \cos(x)$ ha almeno una soluzione in $\mathbb{R}$ allora tale equazione ha infinite soluzioni reali.

ii) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione periodica di periodo $T > 0$ tale che $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - \cos(x)) = 0$ allora $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)$.