Prova scritta di Analisi Matematica I - C. L. in Matematica - 23 luglio 2013

Nome e cognome:

---

1. Siano u, v, w tre numeri complessi distinti. Dimostrare che se u, v, w sono i vertici di un triangolo equilatero allora $(u+v+w)^2 = 3(uv+vw+uw)$.

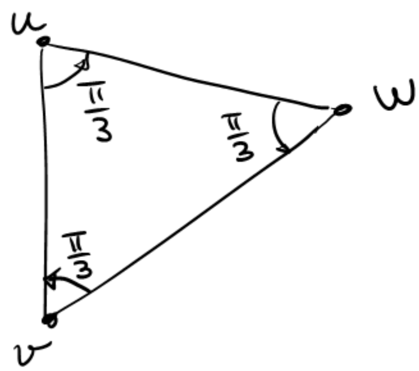
Svolgimento: Osserviamo che

$$(u+v+w)^2 = u^2+v^2+w^2+2uv+2vw+2uw.$$

Quindi l'equazione da verificare è equivalente a

$$u^2+v^2+w^2 = uv+vw+uw.$$

Supponiamo che u, v e w siano disposti in senso antiorario



allora valgono le seguenti equazioni

$$u-v = e^{\frac{\pi i}{3}}(w-v) \qquad \text{(rotazione intorno a } v\text{)},$$

$$v-w = e^{\frac{\pi i}{3}}(u-w) \qquad \text{(rotazione intorno a } w\text{)},$$

$$w-u = e^{\frac{\pi i}{3}}(v-u) \qquad \text{(rotazione intorno a } u\text{)}.$$

Moltiplicando la prima per u, la seconda per v e la terza per w e sommando membro a membro si ottiene

$$u^2-uv+v^2-vw+w^2-wu = e^{\frac{\pi i}{3}}(\cancel{wu}-\cancel{vu}+\cancel{uv}-\cancel{wv}+\cancel{wv}-\cancel{wu}) = 0$$

ossia la tesi.

Se u, v, w sono orientati in senso opposto basta sostituire $e^{i\pi/3}$ con $e^{-i\pi/3}$.

Prova scritta di Analisi Matematica I - C. L. in Matematica - 23 luglio 2013

Nome e cognome: $\sqcup\!\!\sqcup$

---

2. Calcolare i seguenti due limiti:

i) $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to 0^+} x^a \ln(x),$

ii) $\lim_{x \to 0^+} \frac{(1 + x\ln(x^2))^{\frac{1}{x\ln(x)}} - e^2}{\ln(1 + x^x) - \ln(2)}.$

Svolgimento: i) Se $a=0$ allora $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

Se $a<0$ allora $\lim_{x \to 0^+} x^a \ln x = ((+\infty)\cdot(-\infty)) = -\infty$

Se $a>0$ allora

$$\lim_{x \to 0^+} x^a \ln x \underset{y=1/x}{=} \lim_{y \to +\infty} \frac{-\ln y}{y^a} = 0^-.$$

ii)

$$\underset{y = x\ln x}{=} \lim_{y \to 0^-} \frac{(1+2y)^{\frac{1}{y}} - e^2}{\ln\left(\frac{1+e^y}{2}\right)} = \lim_{y \to 0^-} \frac{e^2\left(e^{\frac{\ln(1+2y)}{y} - 2} - 1\right)}{\ln\left(1 + \frac{e^y - 1}{2}\right)}$$

Dato che per $t \to 0$, $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ e $e^t = 1 + t + o(t)$

si ha che

$$= e^2 \cdot \lim_{y \to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{y}\left(\cancel{2y} - \frac{4y^2}{2} + o(y^2)\right) - \cancel{2}} - 1}{\ln\left(1 + \frac{y}{2} + o(y)\right)}$$

$$= e^2 \cdot \lim_{y \to 0^-} \frac{e^{-2y + o(y)} - 1}{\frac{y}{2} + o(y)} = e^2 \cdot \lim_{y \to 0^-} \frac{-2y + o(y)}{\frac{y}{2} + o(y)} = -4e^2.$$

Prova scritta di Analisi Matematica I - C. L. in Matematica - 23 luglio 2013

Nome e cognome: ________________________

---

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Per quali $m, q \in \mathbb{R}$, la condizione

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq |mx + q|$$

implica che esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq f(x_0) \ ?$$

Svolgimento: Per $m = 0$, l'implicazione è FALSA.

Ad esempio $f(x) = |q| + e^x$ soddisfa la condizione ma non ammette un punto di minimo assoluto x_0 perché $\inf_{\mathbb{R}} e^x = 0$ e $e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Se $m \neq 0$ allora l'implicazione è VERA.

Infatti $f(x) \geq |mx+q|$ implica che $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ e quindi $\exists R > 0$ tale che

$$\forall x \in (-\infty, -R) \cup (R, +\infty), \quad f(x) \geq f(0) \quad (*).$$

Dato che f è continua in $[-R, R]$, per il teorema di Weierstrass, $\exists x_0 \in [-R, R]$:

$$\forall x \in [-R, R], \quad f(x) \geq f(x_0) \quad (**).$$

Infine, siccome $0 \in [-R, R]$, $f(0) \geq f(x_0)$ e quindi per $(*)$ e $(**)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq f(x_0).$$

Prova scritta di Analisi Matematica I - C. L. in Matematica - 23 luglio 2013

Nome e cognome: |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

---

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte. Dimostrare o confutare ciascuna delle seguenti proposizioni.

i) Se f è una funzione pari allora f'' è una funzione pari.

ii) Se f'' è una funzione pari allora f è una funzione pari.

Svolgimento: i) La proposizione è VERA.

Se f è pari allora $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$ e derivando due volte i membri di questa equazione si ottiene

$$f'(x) = -f'(-x), \qquad f''(x) = -(-f''(-x)) = f''(-x)$$

ossia che anche f'' è pari.

ii) La proposizione è FALSA.

Ad esempio se $f(x) = x$ allora $f''(x) = 0$ che è una funzione pari mentre $f(x) = x$ non lo è.

Prova scritta di Analisi Matematica I - C. L. in Matematica - 23 luglio 2013

Nome e cognome: |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

---

5. Dimostrare che per ogni numero intero positivo n, l'equazione

$$\cos(2\pi nx) = \ln(1 + |x|).$$

ha almeno $6n$ soluzioni reali.

Svolgimento: Dato che le funzioni $\cos(2\pi nx)$ e $\ln(1+|x|)$ sono definite in $\mathbb{R}$ e sono pari, basta far vedere che la funzione $h(x) = \cos(2\pi nx) - \ln(1+|x|)$ ha almeno $3n$ zeri in $(0,+\infty)$.

Sia $x_k = \frac{k}{2n}$ con k intero in $[0,3n]$.

Notiamo che $\cos(2\pi n x_k) = \cos(\pi k) = (-1)^k$ mentre $0 \leq \ln(1+|x_k|) < 1$ perchè $x_k \leq \frac{3}{2} < e-1$.

Così

$$h(x_k) = \begin{cases} >0 & \text{per } k \text{ pari in } [0,3n], \\ <0 & \text{per } k \text{ dispari in } [0,3n]. \end{cases}$$

Dato che h è continua in $\mathbb{R}$, per il teorema degli zeri, in ogni intervallo (x_{k-1}, x_k) per $k = 1, 2, \ldots, 3n$ c'è almeno uno zero di h.

Visto che gli intervalli sono disgiunti, ci sono almeno $3n$ zeri distinti di h in $(0,+\infty)$.