

Prova scritta di Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

23 luglio 2013

1. Siano u, v, w tre numeri complessi distinti. Dimostrare che se u, v, w sono i vertici di un triangolo equilatero allora $(u + v + w)^2 = 3(uv + vw + uw)$.

2. Calcolare i seguenti due limiti:

i) $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \ln(x),$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 + x \ln(x^2))^{\frac{1}{x \ln(x)}} - e^2}{\ln(1 + x^x) - \ln(2)}.$

3. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Per quali $m, q \in \mathbb{R}$, la condizione

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq |mx + q|$$

implica che esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq f(x_0) ?$$

4. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte. Dimostrare o confutare ciascuna delle seguenti proposizioni.

i) Se f è una funzione pari allora f'' è una funzione pari.

ii) Se f'' è una funzione pari allora f è una funzione pari.

5. Dimostrare che per ogni numero intero positivo n , l'equazione

$$\cos(2\pi nx) = \ln(1 + |x|).$$

ha almeno $6n$ soluzioni reali.