Prova scritta di Analisi Matematica I - C. L. in Matematica - 25 giugno 2013

Nome e cognome: ⌊_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_⌋

---

1. Sia $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ tale che $z^n = 1$ dove $n > 1$ è un numero intero.
Dimostrare che $|z-1| \geq \dfrac{4}{n}$.

Svolgimento: Le soluzioni di $z^n = 1$ con $z \neq 1$ sono

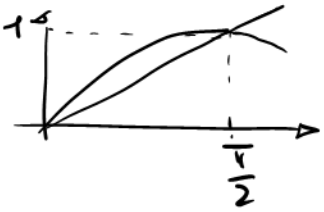
$$z_k = \cos\theta_k + i \,\text{sen}\,\theta_k \quad \text{con} \quad \theta_k = \frac{2\pi k}{n} \quad \text{e} \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Così

$$|z_k - 1| = \sqrt{(\cos\theta_k - 1)^2 + \text{sen}^2\theta_k} = \sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta_k} = 2\,\text{sen}(\theta_k/2).$$

Dato che $\text{sen}(\theta_k/2) = \text{sen}(\theta_{n-k}/2)$ e $\text{sen}\,x$ è crescente in $[0, \frac{\pi}{2}]$ si ha $\text{sen}(\theta_k/2) \geq \text{sen}(\theta_1/2)$ per $k = 1, 2, \dots, n-1$.
Infine, la concavità di $\text{sen}\,x$ in $[0, \pi/2]$ implica che

$$\text{sen}\,x \geq \frac{2}{\pi} x \quad \forall x \in [0, \pi/2]$$



Quindi

$$|z_k - 1| = 2\,\text{sen}(\theta_k/2) \geq 2\,\text{sen}(\theta_1/2) = 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \geq 2 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{4}{n}.$$

Prova scritta di Analisi Matematica I - C. L. in Matematica - 25 giugno 2013

Nome e cognome: |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

---

2. Sia $A = \{\sqrt{n} + m \ : \ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{Z}\}$.

i) Dimostrare che $A \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$.

ii) Dimostrare che $\mathbb{Q} \subset \overline{A}$.

iii) Determinare $\overline{A}$.

Svolgimento:

i) Se $r \in \mathbb{Z}$ allora $r = \sqrt{n} + m$ per $n = 0$ e $m = r$.
Quindi $A \supseteq \mathbb{Z}$ e $A \cap \mathbb{Q} \supseteq \mathbb{Z}$.
Se $\sqrt{n} + m \in \mathbb{Q}$ allora $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ e ciò accade sse n è un quadrato perfetto, da cui $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$ e $\sqrt{n} + m \in \mathbb{Z}$. Quindi $A \cap \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Z}$.

ii) Partendo dall'osservazione che per $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2ax} - x \right) = a$$

posso ottenere ogni $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ con $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}^+$ come limite di una successione di elementi di A.
Infatti se pongo $n_k = (qk)^2 + 2pk$ e $m_k = -qk$ allora $n_k \in \mathbb{N}$ definitivamente e $m_k \in \mathbb{Z}$. Così

$$\begin{aligned} A \ni a_k := \sqrt{n_k} + m_k &= \sqrt{(qk)^2 + 2pk} - qk \\ &= qk\left(\left(1 + \frac{2pk}{q^2k^2}\right)^{1/2} - 1 \right) = qk\left(\cancel{1} + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}p}{q^2} \cdot \frac{1}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right) - \cancel{1} \right) \\ &= \frac{p}{q} + o(1) \to \frac{p}{q}. \end{aligned}$$

iii) $\mathbb{Q} \subseteq \overline{A} \Rightarrow \mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}} \subseteq \overline{A} \Rightarrow \overline{A} = \mathbb{R}$.

Prova scritta di Analisi Matematica I - C. L. in Matematica - 25 giugno 2013

Nome e cognome: ⌊_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_⌋

---

3. Sia $\{x_n\}_{n\geq 0}$ una successione tale che

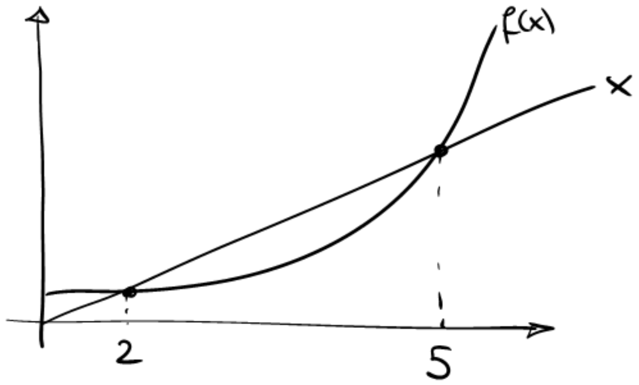
$$\forall n \geq 0, \qquad x_n^2 - 7x_{n+1} + 10 = 0.$$

Determinare se esiste il limite $\lim_{n\to\infty} x_n$ e nel caso calcolarlo, nei seguenti tre casi: i) $x_0 = 1$, ii) $x_0 = 4$ e iii) $x_0 = 6$.

Svolgimento: $\{x_n\}_{n\geq 0}$ è una successione definita per ricorrenza secondo la relazione

$$\forall n\geq 0, \; x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{con} \quad f(x) = \frac{x^2+10}{7}.$$

Dato che



$f((5,+\infty)) = (5,+\infty)$ e $f(x)>x$ in $(5,+\infty)$, $f(5)=5$,

$f((2,5)) = (2,5)$ e $f(x)<x$ in $(2,5)$, $f(2)=2$,

$f((0,2)) \subseteq (0,2)$ e $f(x)>x$ in $(0,2)$.

Quindi

i) $x_0=1 \Rightarrow \{x_n\}$ è strettamente crescente e $x_n<2$
$\Rightarrow x_n$ converge e il limite vale 2.

ii) $x_0=4 \Rightarrow \{x_n\}$ è strettamente decrescente e $x_n>2$
$\Rightarrow x_n$ converge e il limite vale 2.

iii) $x_0=6 \Rightarrow \{x_n\}$ è strettamente crescente e $x_n\geq 6$
$\Rightarrow x_n$ non può convergere a 2 o a 5 e quindi $x_n \to +\infty$.

Prova scritta di Analisi Matematica I - C. L. in Matematica - 25 giugno 2013

Nome e cognome: |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

---

4. Si considerino le funzioni $f(x) = \dfrac{a}{x}$ e $g(x) = \sqrt{x^2 - b}$ con a e b numeri reali positivi.

i) Dimostrare che i grafici di f e g si intersecano in un unico punto P.

ii) Siano r_f e r_g le rette tangenti rispettivamente ai grafici di f e g nel punto P. Dimostrare che r_f e r_g sono ortogonali.

Svolgimento: i) Considero la funzione continua $h(x) = \dfrac{a}{x} - \sqrt{x^2-b}$ definita su $D = (-\infty, -\sqrt{b}] \cup [\sqrt{b}, +\infty)$.

f e g si intersecano se $\exists x_0 \in D : h(x_0) = 0$.

Notiamo che $h(x) < 0 \quad \forall x \in (-\infty, -\sqrt{b}]$. Inoltre $h(\sqrt{b}) > 0$ e $\lim_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$ implicano che per il Teorema degli zeri $\exists x_0 \in (\sqrt{b}, +\infty) : h(x_0) = 0$.

Inoltre $h'(x) = -\dfrac{a}{x^2} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-b}} < 0 \quad \forall x \in (\sqrt{b}, +\infty)$ implica che h è strettamente decrescente in $(\sqrt{b}, +\infty)$ e dunque tale zero è unico.

ii) Sia $P = (x_0, y_0)$ con $y_0 = f(x_0) = g(x_0)$. Allora

$r_f : y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$, $r_g : y = y_0 + g'(x_0)(x - x_0)$.

Inoltre $f'(x_0) = -\dfrac{a}{x_0^2} = -\dfrac{y_0}{x_0}$ e $g'(x_0) = \dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - b}} = \dfrac{x_0}{y_0}$, da cui

$$f'(x_0) \cdot g'(x_0) = -\frac{\cancel{y_0}}{\cancel{x_0}} \cdot \frac{\cancel{x_0}}{\cancel{y_0}} = -1$$

ossia r_f e r_g sono ortogonali.

Prova scritta di Analisi Matematica I - C. L. in Matematica - 25 giugno 2013

Nome e cognome: $\sqcup\!\!\sqcup$

---

5. Siano a e n due numeri interi maggiori di 2.
Dimostrare o confutare ciascuna delle seguenti proposizioni:

i) $\forall b \in \mathbb{N} \cap (1, a),\ \exists k \in \mathbb{N}\ :\ a^n < b^k < a^{n+1}$;

ii) $\forall k \in \mathbb{N} \cap (1, n),\ \exists b \in \mathbb{N}\ :\ a^n < b^k < (a+1)^n$.

Svolgimento: i) Dato che $1<b<a$ allora $a^n < b^k < a^{n+1}$

è equivalente a $n \log_b a < k < (n+1) \log_b a$.

Condizione sufficiente affinché esista almeno un intero k nell'intervallo $(n \log_b a, (n+1) \log_b a)$ è che la sua ampiezza sia > 1. Infatti.

$(n+1)\log_b a - n \log_b a = \log_b a > 1$ perché $1<b<a$.

ii) Dato che $1<k<n$ allora $a^n < b^k < (a+1)^n$

è equivalente a $a^{n/k} < b < (a+1)^{n/k}$.

Come prima, l'esistenza dell'intero b si dimostra valutando l'ampiezza

$$(a+1)^{n/k} - a^{n/k} = f(a+1) - f(a) \overset{\text{TVM}}{=} f'(t)\cdot 1 = \underbrace{\frac{n}{k}}_{>1} \cdot \underbrace{t^{\frac{n}{k}-1}}_{>1} > 1$$

dove $f(x) = x^{n/k}$ e $t \in (a, a+1)$.