Prova scritta di Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

25 giugno 2013

1. Sia $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ tale che $z^n = 1$ dove $n > 1$ è un numero intero.
Dimostrare che $|z-1| \geq \dfrac{4}{n}$.

2. Sia $A = \{\sqrt{n} + m \ : \ n \in \mathbb{N}, \ m \in \mathbb{Z}\}$.

i) Dimostrare che $A \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$.

ii) Dimostrare che $\mathbb{Q} \subset \overline{A}$.

iii) Determinare $\overline{A}$.

3. Sia $\{x_n\}_{n\geq 0}$ una successione tale che

$$\forall n \geq 0, \qquad x_n^2 - 7x_{n+1} + 10 = 0.$$

Determinare se esiste il limite $\lim_{n\to\infty} x_n$ e nel caso calcolarlo, nei seguenti tre casi: i) $x_0 = 1$, ii) $x_0 = 4$ e iii) $x_0 = 6$.

4. Si considerino le funzioni $f(x) = \dfrac{a}{x}$ e $g(x) = \sqrt{x^2 - b}$ con a e b numeri reali positivi.

i) Dimostrare che i grafici di f e g si intersecano in un unico punto P.

ii) Siano r_f e r_g le rette tangenti rispettivamente ai grafici di f e g nel punto P. Dimostrare che r_f e r_g sono ortogonali.

5. Siano a e n due numeri interi maggiori di 2.
Dimostrare o confutare ciascuna delle seguenti proposizioni:

i) $\forall b \in \mathbb{N} \cap (1, a), \ \exists k \in \mathbb{N} \ : \ a^n < b^k < a^{n+1}$;

ii) $\forall k \in \mathbb{N} \cap (1, n), \ \exists b \in \mathbb{N} \ : \ a^n < b^k < (a+1)^n$.