Prova scritta di Analisi Matematica I - C. L. in Matematica - 26 febbraio 2013

Nome e cognome: $\sqcup\!\sqcup$

---

1. Dimostrare che se $z \in \mathbb{C}$ e $|z| = 1$ allora, per ogni numero intero $n > 0$,

$$\left|z + \frac{1}{z}\right| < |z^n + i| + |\overline{z}^n + i| \leq 2\sqrt{2}.$$

Svolgimento: Sia $z = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ allora $z^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$ e

$$|z^n + i| = |\cos n\theta + i(\operatorname{sen} n\theta + 1)| = \sqrt{\cos^2 n\theta + \operatorname{sen}^2 n\theta + 2\operatorname{sen} n\theta + 1}$$
$$= \sqrt{2(1 + \operatorname{sen} n\theta)}$$

Analogamente $|\overline{z}^n + i| = \sqrt{2(1 - \operatorname{sen} n\theta)}$.

Così per studiare $|z^n + i| + |\overline{z}^n + i|$ per $z \in \mathbb{C} : |z| = 1$ basta porre $x = \operatorname{sen} n\theta$ e considerare la funzione

$$f(x) = \sqrt{2}\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right) \quad \text{per } x \in [-1, 1]$$

f è pari, continua in $[-1,1]$ e derivabile in $(-1,1)$.

$$f'(x) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)$$

$+ + + + \quad - - - -$

$-1 \qquad 0 \qquad 1$

Dunque $\forall x \in [-1,1]$, $2 = f(1) = f(-1) \leq f(x) \leq f(0) = 2\sqrt{2}$, ossia $\forall z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \quad 2 \leq |z^n + i| + |\overline{z}^n + i| \leq 2\sqrt{2}$.

Inoltre $\left|z + \frac{1}{z}\right| = |z + \overline{z}| = 2|\cos\theta| \leq 2$ e l'uguaglianza vale se e solo se $z = 1$ o $z = -1$, mentre per tali valori $|z^n + i| + |\overline{z}^n + i| = 2\sqrt{2} > 2$. Così

$$\left|z + \frac{1}{z}\right| < |z^n + i| + |\overline{z}^n + i|.$$

Prova scritta di Analisi Matematica I - C. L. in Matematica - 26 febbraio 2013

Nome e cognome:

---

2. Siano A e B sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

i) Determinare A e B tali che $A\cap\overline{B}$, $\overline{A}\cap B$, $\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A\cap B}$ siano quattro insiemi distinti.

ii) Determinare A e B tali che $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A\cap\overline{B}$, $\overline{A}\cap B$, $\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A\cap B}$ siano sei insiemi distinti.

Svolgimento:

Un esempio di insiemi A, B che soddisfano ii) (e quindi anche i)) è il seguente:

$$A=\{0\}\cup[2,3) \quad e \quad B=(0,1]\cup\{3\}.$$

Infatti gli insiemi

$\overline{A}=\{0\}\cup[2,3]$, $\overline{B}=[0,1]\cup\{3\}$,

$A\cap\overline{B}=\{0\}$, $\overline{A}\cap B=\{3\}$, $\overline{A}\cap\overline{B}=\{0,3\}$,

$\overline{A\cap B}=\overline{\emptyset}=\emptyset$ sono tutti distinti.

Prova scritta di Analisi Matematica I - C. L. in Matematica - 26 febbraio 2013

Nome e cognome:

---

3. Determinare i seguenti limiti:

i) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+3\sin(2x)+5x+x^2}+x\sqrt{1+7\sin(3/x)}\right)$,

ii) $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\cos(5/x)-x(x-1)e^{1/x}\right)$.

Svolgimento: i) Posto $x=-1/t$ si ha che $t\to0^+$ e

$$\dots=\left(1-3\,\mathrm{sen}\left(\frac{2}{t}\right)-\frac{5}{t}+\frac{1}{t^2}\right)^{1/2}-\frac{1}{t}\left(1-7\,\mathrm{sen}\,3t\right)^{1/2}$$

$$=\frac{1}{t}\left[\left(t^2-3t^2\,\mathrm{sen}\left(\frac{2}{t}\right)-5t+1\right)^{1/2}-\left(1-7\,\mathrm{sen}\,3t\right)^{1/2}\right]$$

Ora $t\cdot\mathrm{sen}\left(\frac{2}{t}\right)=o(1)$, $\mathrm{sen}\,3t=3t+o(t)$,

$$=\frac{1}{t}\left[\left(1-5t+o(t)\right)^{1/2}-\left(1-21t+o(t)\right)^{1/2}\right]$$

Inoltre $\left(1+\alpha t+o(t)\right)^{1/2}=1+\frac{\alpha}{2}t+o(t)$, così

$$=\frac{1}{t}\left[\cancel{1}-\frac{5}{2}t-\cancel{1}+\frac{21}{2}t+o(t)\right]=8+o(1)\to8.$$

ii) Posto $x=\frac{1}{t}$ si ha che $t\to0^+$ e siccome

$$\cos5t=1-\frac{25t^2}{2}+o(t^2),\quad e^t=1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)$$

si ha che

$$\dots=\frac{1}{t^2}\left(1-\frac{25t^2}{2}+o(t^2)\right)-\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}-1\right)\left(1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)$$

$$=\frac{1}{t^2}\left(1-\frac{25t^2}{2}+(t-1)\left(1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)\right)$$

$$=\frac{1}{t^2}\left(\cancel{1}-\frac{25t^2}{2}+\cancel{t}+t^2-\cancel{1}-\cancel{t}-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)$$

$$=-12+o(1)\to12.$$

Nome e cognome: |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

---

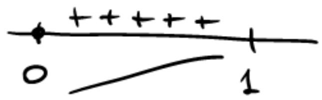
4. Dimostrare le seguenti proposizioni.

i) Per ogni $x \in [0,1]$, $\dfrac{x^2}{4} \leq x - \ln(1+x) \leq \dfrac{x^2}{2}$.

ii) Per ogni intero positivo n, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) < e^{11/12}$.

Svolgimento: i) Sia $f(x) = x - \ln(1+x) - \dfrac{x^2}{4}$ allora $[0,1] \subseteq D_f$ e

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} - \frac{x}{2} = \frac{x(1-x)}{2(1+x)}$$



Quindi $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \geq f(0) = 0$.

Sia $g(x) = x - \ln(1+x) - \dfrac{x^2}{2}$ allora $[0,1] \subseteq D_g$ e

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} - x = -\frac{x^2}{1+x}$$

Quindi $\forall x \in [0,1]$, $0 = f(0) \geq f(x)$.

ii) Dato che $x \to \ln x$ è una funzione strettamente crescente in $(0,+\infty)$ è equivalente dimostrare che

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \overset{?}{\leq} \ln\left(e^{11/12}\right) = \frac{11}{12}.$$

Per i) $\ln\left(1+\dfrac{1}{2^k}\right) \leq \dfrac{1}{2^k} - \dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{1}{2^k}\right)^2 = \dfrac{1}{2^k} - \dfrac{1}{4^{k+1}}$, così

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4^{k+1}} = \frac{1}{2}\,\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{16}\,\frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{12} + \frac{1}{12\cdot 4^n} = \frac{11}{12} - \frac{1}{2^n}\underbrace{\left(1-\frac{1}{12\cdot 2^n}\right)}_{>0} < \frac{11}{12}.$$

Prova scritta di Analisi Matematica I - C. L. in Matematica - 26 febbraio 2013

Nome e cognome: |__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|

---

5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f(f(x)) = x$.

i) Determinare una tale funzione f per cui per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq x$.

ii) Dimostrare che se $f \in C(\mathbb{R})$ allora esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = x_0$.

Svolgimento: i) Ad esempio

$$f(x) = x + (-1)^{\lfloor x \rfloor} = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \in [n, n+1) \text{ con } n \text{ pari} \\ x-1 & \text{se } x \in [n, n+1) \text{ con } n \text{ dispari} \end{cases}$$

È facile verificare che $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(f(x)) = x$.

Inoltre $f(x) \neq x$ perché $(-1)^{\lfloor x \rfloor} \in \{-1, 1\}$.

ii) Se $f \in C(\mathbb{R})$ e per assurdo $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq x$ allora, per continuità, ci sono due casi

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > x$
allora $0 < f(0) < f(f(0)) = 0$ contraddizione!

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) < x$
allora $0 > f(0) > f(f(0)) = 0$ contraddizione!