Prova scritta di Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

26 febbraio 2013

1. Dimostrare che se $z \in \mathbb{C}$ e $|z| = 1$ allora, per ogni numero intero $n > 0$,

$$\left| z + \frac{1}{z} \right| < |z^n + i| + |\overline{z}^{\,n} + i| \le 2\sqrt{2}.$$

2. Siano A e B sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

i) Determinare A e B tali che $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B}$ siano quattro insiemi distinti.

ii) Determinare A e B tali che $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B}$ siano sei insiemi distinti.

3. Determinare i seguenti limiti:

i) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{1 + 3\sin(2x) + 5x + x^2} + x\sqrt{1 + 7\sin(3/x)} \right),$

ii) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \left(x^2 \cos(5/x) - x(x-1)e^{1/x} \right).$

4. Dimostrare le seguenti proposizioni.

i) Per ogni $x \in [0, 1]$, $\displaystyle \frac{x^2}{4} \le x - \ln(1 + x) \le \frac{x^2}{2}.$

ii) Per ogni intero positivo n, $\displaystyle \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k} \right) < e^{11/12}.$

5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f(f(x)) = x$.

i) Determinare una tale funzione f per cui per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq x$.

ii) Dimostrare che se $f \in C(\mathbb{R})$ allora esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = x_0$.