Prova scritta di Analisi Matematica I - C. L. in Matematica - 5 febbraio 2013

Nome e cognome: |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

---

1. Siano $z, w \in \mathbb{C}$ tali che $\overline{w}z \neq 1$ e sia $f_w(z) = \dfrac{z-w}{1-\overline{w}z}$.

i) Calcolare le radici terze di $f_w(z)$ per $w = (1+i)/3$ e $z = (-3+4i)/5$.

ii) Dimostrare che per ogni numero complesso w tale che $w \notin S$, si ha che $f_w(S) = S$ dove $S = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$.

Svolgimento: i)

$$f_w(z) = \frac{z-w}{1-\overline{w}z} = \frac{(-3+4i)\cdot 3 - 5(1+i)}{15-(1-i)(-3+4i)} = \frac{-14+7i}{14-7i} = -1.$$

Calcoliamo le radici terze di -1.

$$u^3 = -1 = e^{i\pi} \Rightarrow u_1 = 1,\ u_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ u_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

ii) Se $z \in S$ e $w \notin S$ allora $|\overline{w}z| = |w| \neq 1$ e quindi $\overline{w}z \neq 1$. Inoltre

$$f_w(z) \in S \iff \left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right| = 1 \iff |z-w| = |1-\overline{w}z|.$$

Ma $z \cdot \overline{z} = |z|^2 = 1$ implica che

$$|1-\overline{w}z| = |\overline{z}\cdot z - \overline{w}z| = |\overline{z}-\overline{w}|\,|z| = |z-w|$$

Abbiamo così verificato che $f_w(z)(S) \subseteq S$.

Basta ancora far vedere che $f_w(z)(S) \supseteq S$.

Sia $u \in S$ e cerchiamo $z \in S$: $f_w(z) = u$

$$u = \frac{z-w}{1-\overline{w}z} \iff z - w = u - u\overline{w}z \iff z = \frac{u+w}{1+\overline{w}u}$$

e come in (*) si vede che $|z| = 1$ ossia $z \in S$.

Prova scritta di Analisi Matematica I - C. L. in Matematica - 5 febbraio 2013

Nome e cognome: $\sqcup\!\!\sqcup$

---

2. Dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due successioni $\{a_n\}_{n\geq 0}$, $\{b_n\}_{n\geq 0}$ tali che

$$\forall n \geq 0,\ a_n < b_n, \quad \bigcup_{n=0}^{\infty}(a_n, b_n) \supset \mathbb{Q} \quad \text{e} \quad \forall N \geq 0,\ \sum_{n=0}^{N}(b_n - a_n) < \varepsilon.$$

Svolgimento: Sia $\{q_n\}_{n\geq 0}$ un'enumerazione dell'insieme numerabile $\mathbb{Q}$.

Poniamo $a_n = q_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}$ e $b_n = q_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}$.

È evidente che $q_n \in (a_n, b_n)$ e quindi

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} (a_n, b_n) \supset \mathbb{Q}.$$

Inoltre per $N \geq 0$

$$\sum_{n=0}^{N} (b_n - a_n) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2 = \varepsilon.$$

Prova scritta di Analisi Matematica I - C. L. in Matematica - 5 febbraio 2013

Nome e cognome:

---

3. Determinare il seguente limite

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{3x^x - 2(\cos(\pi x))^2 - 3x + 2}{(\sqrt{x}-1)^a}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}^+$.

Svolgimento: Sia $x = 1+t$ con $t \to 0^+$.

$$\sqrt{x} - 1 = (1+t)^{1/2} - 1 = \cancel{1} + \frac{1}{2}t + o(t) - \cancel{1}.$$

$$x^x = x \cdot x^{x-1} = (1+t)\, e^{t \ln(1+t)}$$

$$= (1+t)\, e^{t(t+o(t))} = (1+t)\, e^{t^2+o(t^2)}$$

$$= (1+t)(1+t^2+o(t^2)) = 1+t+t^2+o(t^2).$$

$$(\cos \pi x)^2 = (\cos(\pi + \pi t))^2 = (\cos \pi t)^2$$

$$= \left(1 - \frac{\pi^2 t^2}{2} + o(t^2)\right)^2 = 1 - \pi^2 t^2 + o(t^2).$$

Quindi

$$\frac{3x^x - 2(\cos(\pi x))^2 - 3x + 2}{(\sqrt{x}-1)^a} =$$

$$= \frac{\cancel{3} + \cancel{3t} + 3t^2 - \cancel{2} + 2\pi^2 t^2 - \cancel{3t} - \cancel{3} + \cancel{2} + o(t^2)}{(\cancel{1} + \frac{t}{2} + o(t) - \cancel{1})^a}$$

$$= \frac{(3+2\pi^2)t^2 + o(t^2)}{\frac{t^a}{2^a}(1+o(1))} \xrightarrow{t\to 0^+} \begin{cases} 4(3+2\pi^2) & \text{se } a=2 \\ 0 & \text{se } 0<a<2 \\ +\infty & \text{se } a>2. \end{cases}$$

Prova scritta di Analisi Matematica I - C. L. in Matematica - 5 febbraio 2013

Nome e cognome: $\sqcup\!\!\sqcup$

---

4. Determinare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(f_n^{(m+2)}(x) - 2f_n^{(m+1)}(x) + f_n^{(m)}(x))}{f_n(x)}$$

dove $m, n \in \mathbb{N}^+$ e $f_n(x) = x^n e^x$.

Svolgimento: Si osserva che

$$f_n^{(1)}(x) = f_n'(x) = (x^n + n x^{n-1})e^x$$

$$f_n^{(2)}(x) = f_n''(x) = (x^n + 2n x^{n-1} + n(n-1)x^{n-2})e^x$$

Così

$$f_n^{(2)}(x) - 2f_n^{(1)}(x) + f_n(x) = (\cancel{x^n} + \cancel{2n x^{n-1}} + n(n-1)x^{n-2}$$
$$- \cancel{2x^n} - \cancel{2n x^{n-1}} + \cancel{x^n})e^x = n(n-1)x^{n-2}e^x.$$

Per linearità, per $m \geq 0$

$$f_n^{(m+2)}(x) - 2f_n^{(m+1)}(x) + f_n^{(m)}(x) = \frac{d^m}{dx^m}\left(f_n^{(2)}(x) - 2f_n^{(1)}(x) + f_n(x)\right)$$
$$= \Big(n(n-1)x^{n-2} + \underbrace{P_{nm}(x)}_{\text{polinomio di grado } < n-2}\Big)\cdot e^x.$$

Infine, per $x \to +\infty$

$$\frac{x^2(f_n^{(m+2)}(x) - 2f_n^{(m+1)}(x) + f_n^{(m)}(x))}{f_n(x)}$$
$$= \frac{(n(n-1)x^n + x^2 P_{nm}(x))\cancel{e^x}}{x^n \cdot \cancel{e^x}} \to n(n-1).$$

Prova scritta di Analisi Matematica I - C. L. in Matematica - 5 febbraio 2013

Nome e cognome:

---

5. Sia $f(x) = x^3 - x$.

i) Esiste un punto $P_0 \in \mathbb{R}^2$ tale che per P_0 non passa nessuna retta tangente al grafico di f?

ii) Esiste un punto $P_3 \in \mathbb{R}^2$ tale che per P_3 passano tre rette distinte, ciascuna tangente al grafico di f?

Svolgimento: Per determinare le eventuali rette tangenti al grafico di f, passanti per un punto assegnato $P=(x,y) \in \mathbb{R}^2$ è necessario risolvere nella variabile $t \in \mathbb{R}$ l'equazione $y = f'(t)(x-t)+f(t)$ ossia

$$2t^3 - 3xt^2 + x + y = 0 \qquad (*)$$

(perché $f(t) = t^3 - t$, $f'(t) = 3t^2 - 1$).

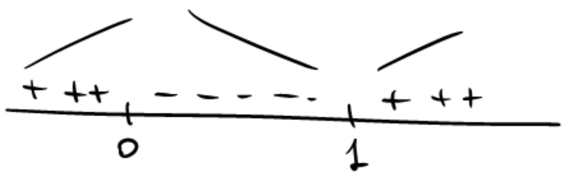
i) P_0 NON ESISTE perché $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ il polinomio di 3° grado in $(*)$ ha sempre almeno uno zero reale.

ii) P_3 ESISTE. Ad esempio basta prendere $x=1$ e $y=-\frac{1}{2}$. In tal caso $(*)$ diventa

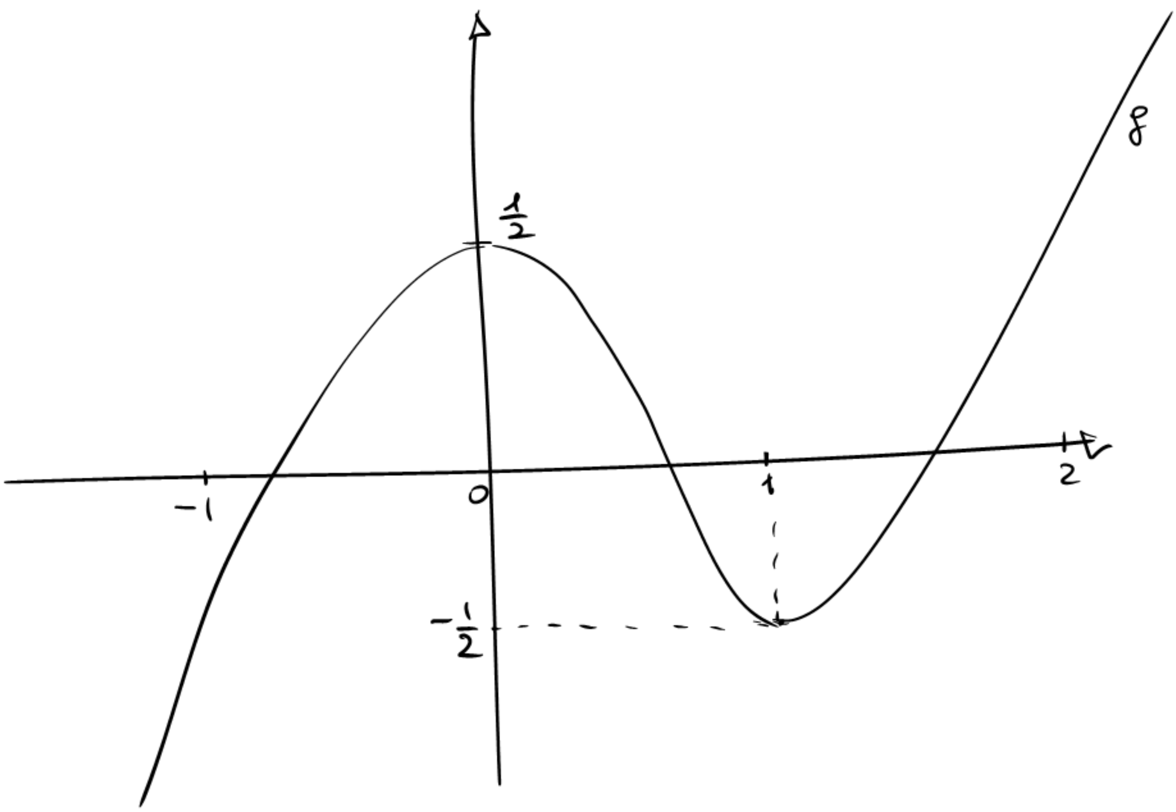
$$g(t) := 2t^3 - 3t^2 + \frac{1}{2} = 0$$

e siccome

$$g'(t) = 6t^2 - 6t = 6t(t-1)$$



si ottiene facilmente che



Così, dato che

$$g(2) = 16 - 12 + \frac{1}{2} > 0,$$
$$g(1) = -\frac{1}{2} < 0,$$
$$g(0) = \frac{1}{2} > 0,$$
$$g(-1) = -2 - 3 + \frac{1}{2} < 0,$$

per continuità, g ha tre zeri reali distinti che corrispondono a tre rette tangenti al grafico di f passanti per $P_3 = (1, -\frac{1}{2})$.