Matematica Discreta

Venerdì 17 settembre 2010

Esercizio 1. Dimostrare che per ogni n intero non negativo

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)(H_{n+1}-1)$, (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(n-k)H_k = \frac{n(n+1)}{4}(2H_{n+1}-3)$,

dove $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

Esercizio 2. Determinare il più piccolo multiplo positivo N di 1965 tale che le sue ultime 4 cifre siano uguali a 2010.

Esercizio 3. Determinare le probabilità p_a e p_b che una permutazione $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10})$ degli elementi dell'insieme $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ abbia rispettivamente le seguenti proprietà:
(a) se $x_i \in \{1, 2, 3, 4\}$ per qualche intero $0 < i < 10$ allora $x_{i+1} \notin \{1, 2, 3, 4\}$,
(b) esistono degli interi i e j tali che $\{x_i, x_{i+1}, x_j, x_{j+1}\} = \{1, 2, 3, 4\}$ e $2 < i + 2 < j < 10$.

Esercizio 4. Su r righe sono disposte $n_1, n_2, \dots, n_r$ pedine. Due giocatori a turno possono scegliere una riga i con $1 \le i \le r$ e da questa togliere

$2k$ pedine con $2 \le 2k < n_i$ se n_i è pari oppure k pedine con $1 \le k \le n_i$ se n_i è dispari.

Perde chi non può più effettuare una mossa.
(a) Determinare la funzione di Grundy nel caso $r = 1$.
(b) Determinare tutte le terne (n_1, n_2, n_3) con $3 \le n_1 < n_2 < n_3 \le 10$, che rappresentano una posizione iniziale sfavorevole al primo giocatore.
