

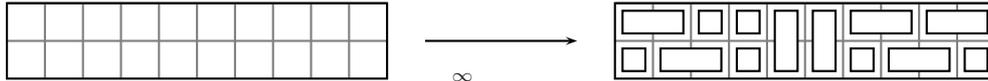
Matematica Discreta

Venerdì 8 luglio 2011

Esercizio 1. Determinare tutti gli elementi del seguente insieme

$$\left\{ k \in \mathbb{N} : \left\lfloor \frac{2011k}{3} \right\rfloor \equiv 3 \pmod{1000} \right\}.$$

Esercizio 2. Un rettangolo $2 \times n$ deve essere ricoperto utilizzando tessere rettangolari 2×1 o 1×2 e tessere quadrate 1×1 . Qui sotto è rappresentato il caso $n = 10$:



- (a) Calcolare la funzione generatrice $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ dove a_n è il numero di tali ricoprimenti.
- (b) Dimostrare che $2 \cdot 3^{n-1} \leq a_n \leq 4^n$ per $n \geq 1$.

Esercizio 3. Un mazzo contiene $4 \cdot (2n + 1)$ carte con $n \geq 1$. Ogni carta è caratterizzata da un seme dei 4 possibili e da un valore intero compreso tra 1 e $2n + 1$. Siano

$$p_n = \begin{array}{l} \text{numero di mani di 5 carte dove ci sono almeno} \\ \text{4 carte di semi diversi e di valori dei numeri pari,} \end{array}$$

e

$$d_n = \begin{array}{l} \text{numero di mani di 5 carte dove ci sono almeno} \\ \text{4 carte di semi diversi e di valori dei numeri dispari} \end{array}.$$

Determinare delle formule chiuse per p_n e d_n e calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n - p_n}{n^4}.$$

Esercizio 4. Contare il numero di sottoinsiemi di $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ che soddisfano la seguente proprietà:

$$\exists x, y \in A \quad : \quad 0 < |x - y| < 3.$$
