

# Matematica Discreta

Secondo Esonero - Mercoledì 27 aprile 2005

---

**Esercizio 1.** Consideriamo l'insieme dei numeri interi contenuti nell'intervallo  $[0, 2005]$ .

- (a) Quanti sono i numeri che hanno le cifre in ordine crescente ( $\leq$ )?
- (b) Quanti sono i numeri che hanno le cifre in ordine decrescente ( $\geq$ )?

---

**Esercizio 2.** Supponiamo di avere 5 mazzi di 52 carte (13 valori e 4 semi). Calcolare la probabilità che in una mano di 5 carte ci sia almeno una carta di ogni seme nei seguenti casi:

- (a) le carte sono state estratte dallo stesso mazzo;
- (b) le carte sono state estratte ognuna da un mazzo diverso.

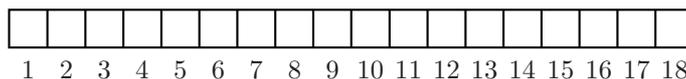
---

**Esercizio 3.** Un punto si muove lungo i lati di un triangolo equilatero: percorre ogni lato in un minuto e da ogni vertice prosegue lungo uno dei due lati con la stessa probabilità.

- (a) Qual è la probabilità che il punto si ritrovi sul vertice iniziale dopo  $n$  minuti?
- (b) Dopo quanti minuti la probabilità che il punto abbia percorso almeno una volta ogni lato del triangolo è maggiore di  $1/2$ ?

---

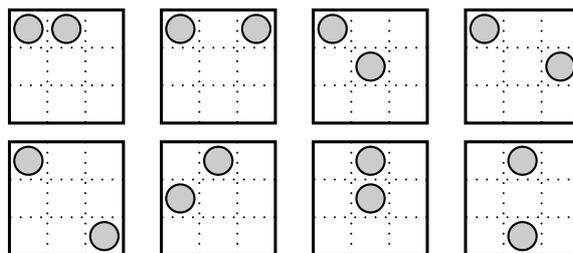
**Esercizio 4.** Consideriamo una striscia di caselle numerate da 1 a 18. Da una certa casella iniziale, una pedina viene mossa alternativamente da due giocatori verso sinistra di una o quattro posizioni. Vince il giocatore che per primo raggiunge la casella 1.



- (a) Calcolare il valore della funzione di Grundy per ciascuna delle 18 posizioni del gioco.
- (b) Qual è la probabilità che sia favorito primo giocatore se la posizione iniziale è la somma dei valori ottenuti dal lancio di tre dadi?

---

**Esercizio 5.** Un'industria meccanica deve fabbricare dei pannelli metallici quadrati con due fori in posizione generica rispetto ad una griglia  $n \times n$ . Dato che i pannelli possono essere girati e ruotati molte configurazioni sono equivalenti. Per esempio se  $n = 3$  il numero totale di configurazioni è 36, ma quelle effettivamente necessarie sono solo 8:



- (a) Calcolare il numero minimo di configurazioni  $p(n)$  al variare di  $n \geq 2$ .
- (b) Se  $t(n)$  rappresenta il numero totale di configurazioni quanto vale il limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p(n)}{t(n)}$ ?

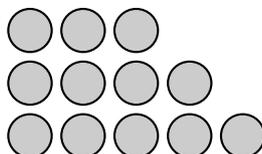
---

**Esercizio 6.** Su  $r$  righe sono disposte  $n_1, n_2, \dots, n_r$  pedine. Due giocatori a turno possono:

- togliere 1 o 2 pedine da una riga;
- dividere una riga in due righe non vuote.

Vince chi riesce a prendere l'ultima pedina.

- (a) Con la seguente disposizione iniziale qual è il giocatore favorito?



- (b) Sviluppare una strategia per una generica posizione iniziale determinando quale dei due giocatori è favorito.
-