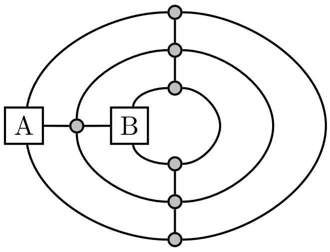
Matematica Discreta 2005

Esercizi di preparazione

Esercizio 1. Supponiamo di avere un rettangolo di cartone di dimensioni intere n e m e di tagliarlo successivamente secondo la seguente regola: togliamo il quadrato di dimensione maggiore e procediamo nello stesso modo con il rettangolo che rimane. Che dimensioni deve avere il rettangolo perché il processo si interrompa dopo un numero finito di tagli? Determinare per tali rettangoli le dimensioni dell'ultimo quadrato tagliato.

Esercizio 2. Una parte di una rete telefonica "difettosa" ha la seguente struttura: ogni nodo grigio rappresenta una centralina di collegamento che ha probabilità 0.5 di funzionare, mentre due terminali sono posizionati nel nodo A e nel nodo B.



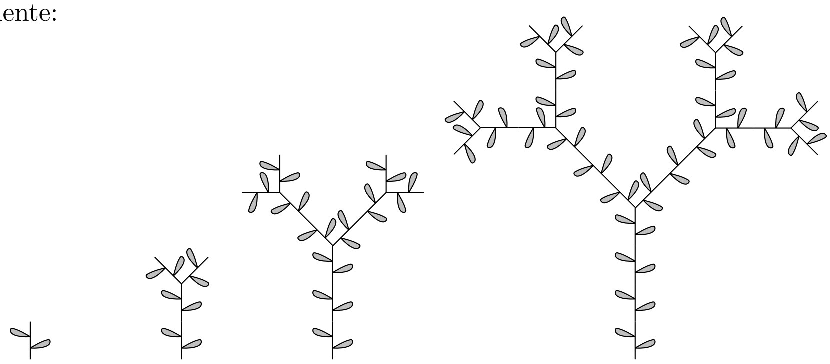
Qual è la probabilità che ad un certo istante A e B possano comunicare?

Esercizio 3. Per giocare a poker quattro persone possono scegliere se giocare con un mazzo "classico" di 52 carte (13 valori e 4 semi) oppure con lo stesso mazzo da dove però sono stati tolti i 2, i 3, i 4, i 5, e i 6. Calcolare nei due casi le probabilità di avere nella mano iniziale di 5 carte le seguenti combinazioni:

1. Full (un tris e una coppia): K$\heartsuit$, K$\diamondsuit$, K$\spadesuit$, A$\diamondsuit$, A$\clubsuit$;
2. Poker (4 carte dello stesso valore): A$\heartsuit$, A$\diamondsuit$, A$\clubsuit$, A$\spadesuit$, Q$\heartsuit$;
3. Colore (5 carte dello stesso seme non consecutive): 7$\diamondsuit$, 8$\diamondsuit$, 9$\diamondsuit$, Q$\diamondsuit$, A$\diamondsuit$.

Commentare il risultato.

Esercizio 4. L'andamento della crescita di un certo tipo di pianta può essere schematizzato nel modo seguente:

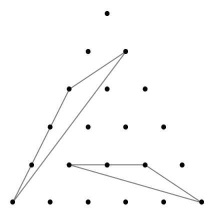


Quante foglie avrà la pianta dopo n mesi?

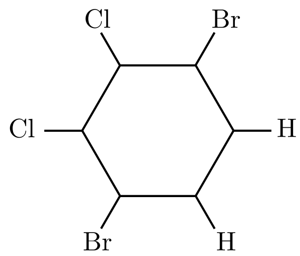
Esercizio 5. Dimostrare che le seguenti disuguaglianze valgono per ogni intero positivo n:

$$\sqrt{n} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

Esercizio 6. Quanti sono i triangoli non degeneri che hanno come vertici tre punti del seguente schema?



Esercizio 7. La formula chimica $C_6H_2Cl_2Br_2$ corrisponde alla seguente struttura: i sei atomi di carbonio sono posizionati ai vertici di un esagono e a ciascuno di questi sono legati i due atomi di idrogeno, i due di cloro e i due di bromo.



Quante sono le molecole "topologicamente" non equivalenti?

Esercizio 8. Determinare il massimo numero di "pezzi" in cui può essere diviso il piano tracciando

1. n rette;
2. n circonferenze;
3. n ellissi.

Esercizio 9. Per un pagamento on-line un cliente deve inviare il numero x corrispondente alle ultime cifre del numero della sua carta di credito. Per la spedizione il cliente utilizza la codifica RSA con la chiave pubblica $(14803, 11)$ fornita dalla ditta presso la quale ha fatto l'acquisto. Il numero codificato è 5289, ossia

$$5289 = x^{11} \pmod{14803}.$$

Siete in grado di determinare x?

Esercizio 10. Un amico vi racconta che sta traslocando e deve trasportare una collezione di calici di cristallo. I calici non sono più di 60. Ne ha già messi una metà in alcune scatole da 5, riempiendole tutte tranne una dove sono rimasti 2 posti vuoti. L'altra metà dei calici li ha sistemati in scatole da 6, riempiendole tutte tranne una dove è rimasto un solo posto vuoto. Quanti sono in totale i calici?

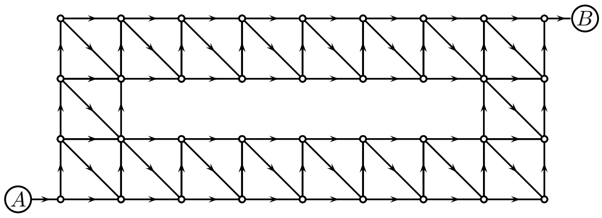
Esercizio 11. State concludendo una partita a scopa con un vostro amico. Siete all'ultima mano e la situazione è la seguente:

- sul tavolo ci sono $1\spadesuit$, $5\diamondsuit$, $7\clubsuit$ e $7\diamondsuit$;
- il vostro avversario ha ancora una carta;
- voi avete in mano $1\clubsuit$ e $7\heartsuit$.

Quale carta giocate per prima?

Esercizio 12. Da una raffineria bisogna prelevare 2 000 000 di litri di benzina. Per il trasporto si utilizzeranno delle autobotti che hanno un serbatoio da 23 000 litri con eventualmente un rimorchio che ha un serbatoio da 15 000 litri. Per motivi di sicurezza i serbatoi devono essere riempiti completamente e inoltre si cerca di impiegare il maggior numero possibile di rimorchi. Quante autobotti e quanti rimorchi sono necessari?

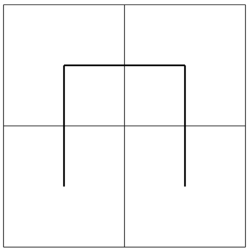
Esercizio 13. Consideriamo il seguente grafo orientato:



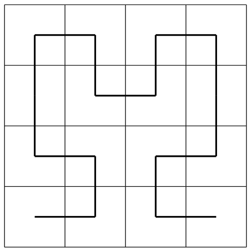
(a) Quanti sono i percorsi dal nodo A al nodo B?

(b) Determinare un algoritmo che calcoli i percorsi da A a B al variare del numero n di moduli orizzontali (nel disegno $n = 8$).

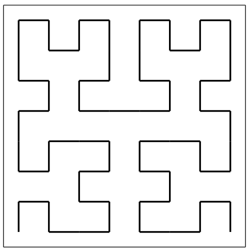
Esercizio 14. La *Curva di Hilbert* si costruisce ricorsivamente nel seguente modo:



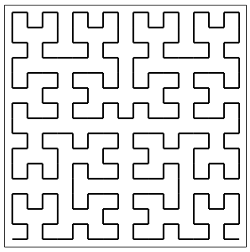
1^o Passo



2^o Passo



3^o Passo



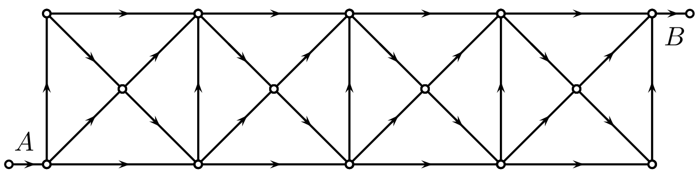
4^o Passo

(a) Se il quadrato che contiene la curva ha perimetro 4, quanto è lunga la curva al passo n?

(b) Nei primi quattro passi della costruzione la curva è formata rispettivamente da 3, 13, 51 e 205 segmenti rettilinei. Quanti sono i segmenti della curva al passo n?

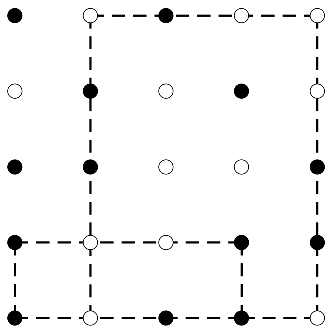
Esercizio 15. Uno *screensaver* funziona nel seguente modo: all'inizio lo schermo viene suddiviso in 6×8 caselle colorate di rosso, verde o blu; quindi, ogni 3 secondi, sono scelte a caso due caselle e se queste hanno colori diversi vengono colorate entrambe del terzo colore mentre se hanno lo stesso colore restano invariate.
Se ad un certo momento le caselle rosse sono 14, quelle verdi sono 16 e quelle blu sono 18, lo schermo potrà mai diventare definitivamente tutto dello stesso colore?

Esercizio 16. La circolazione stradale in una città è regolata secondo lo schema seguente:



Supponiamo di entrare in città dal “varco” A e di volerla attraversare e uscire dal “varco” B. Quanti sono i tragitti possibili?

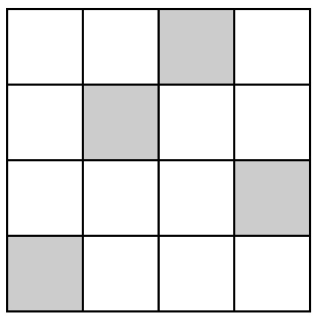
Esercizio 17. Si consideri l’insieme dei rettangoli non degeneri con i lati orizzontali e verticali che hanno come vertici quattro punti di uno reticolo 5×5.



(a) Quanti sono questi rettangoli?

(b) Se i punti del reticolo vengono colorati di bianco o di nero, è sempre possibile trovare un rettangolo che abbia i suoi quattro vertici tutti dello stesso colore?

Esercizio 18. Un pittore *minimalista* suddivide una tela quadrata in 4×4 caselle quadrate e decide di colorare ciascuna casella di bianco o di nero.



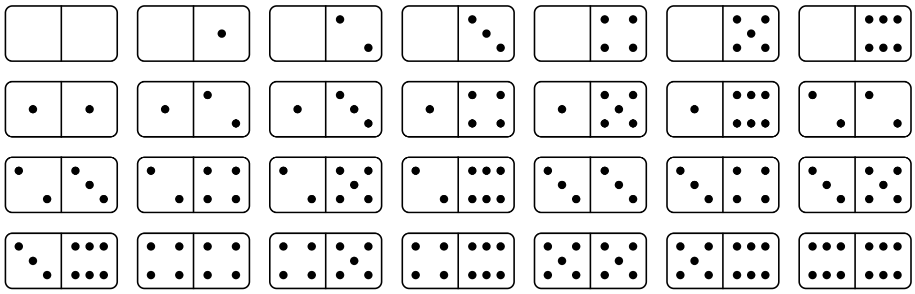
(a) Quante tele è possibile ottenere con questo procedimento, considerando che le tele si possono anche ruotare?

(b) Quante sono le tele con esattamente 4 caselle nere?

Esercizio 19. Il botteghino di un teatro vende i biglietti per uno spettacolo al prezzo di 5 euro. 8 persone stanno aspettando in fila il loro turno: 4 persone hanno una banconota da 5 euro mentre le altre 4 hanno una banconota da 10 euro. Sapendo che la cassa all’inizio è vuota, qual è la probabilità che la fila sia ordinata in modo tale che il botteghino riesca sempre a dare il resto alle persone che presentano una banconota da 10 euro?

Esercizio 20. Dati n quadrati, non necessariamente uguali, è possibile “ritagliarli” in modo che ridisponendo i pezzi, senza sovrapporli, si possa ottenere un unico quadrato?

Esercizio 21. Il domino si gioca con 28 tessere:



Il gioco consiste nel disporre una tessera di seguito all'altra mettendo a contatto i lati delle metà con lo stesso numero di puntini. Seguendo questa regola costruite una linea chiusa utilizzando il maggior numero possibile di tessere.

Esercizio 22. Quali dei seguenti numeri sono divisibili per 13?

$$2^{2002} + 3^{2002}, \quad 4^{2004} + 5^{2004}, \quad 6^{2003} + 7^{2003}.$$

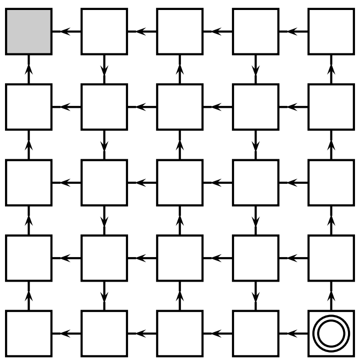
Esercizio 23. Le 6 centraline telefoniche del comune di una città sono tutte collegate tra loro: tra due qualunque centraline c'è un cavo che le unisce. Ciascun cavo appartiene alla compagnia privata A o alla compagnia privata B (ma non ad entrambi). È possibile che il comune debba pagare il canone a tutte e due le compagnie per assicurare che la rete delle centraline sia connessa?

Esercizio 24. Consideriamo la seguente versione ridotta del *Gioco dell'Oca*: si parte dalla casella 0 e ci si muove, seguendo la progressione dei numeri, del numero di caselle corrispondente all'esito del lancio di un dado. Il gioco termina quando raggiungiamo la casella finale 8.

0	7	6
1	8	5
2	3	4

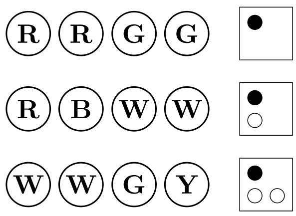
Prima di iniziare il gioco un amico vi propone la seguente scommessa: vincete 5 euro se terminate "esattamente" sulla casella finale altrimenti pagate 2 euro. Accettate la scommessa?

Esercizio 25. Due giocatori muovono a turno una pedina spostandola di una o due caselle lungo le direzioni specificate dal seguente schema. Si parte dalla casella in basso a destra e vince chi riesce a muovere la pedina nella casella finale posta in alto a sinistra.



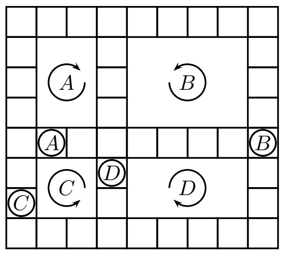
Il gioco è favorevole al primo o al secondo giocatore? Descrivete la strategia "vincente".

Esercizio 26. Il gioco del *Master Mind*™ consiste nello scoprire una sequenza segreta di 4 colori (anche ripetuti) scelti dall'avversario tra: rosso (**R**), verde (**G**), blu (**B**), bianco (**W**), giallo (**Y**) e arancio (**O**). Ad ogni singolo tentativo l'avversario dichiara quanti colori sono nella giusta posizione (pallini neri) e, dei rimanenti, quanti compaiono nella sequenza, ma non sono nella posizione corretta (pallini bianchi). In una partita sono già stati fatti i seguenti tre tentativi:



In base alle risposte, quali sono le possibili soluzioni? Individuare una strategia per determinare la sequenza segreta in ogni caso nel minor numero di mosse.

Esercizio 27. Quattro pedine A, B, C, D si muovono nello schema seguente in questo modo: partendo dalle posizioni indicate, ogni secondo avanzano di una casella orbitando nei singoli quadrati e rispettando il senso di rotazione assegnato.



(a) Dopo quanti secondi avviene la prima sovrapposizione?

(b) Dopo quanti secondi le pedine ritornano tutte nella loro posizione iniziale?

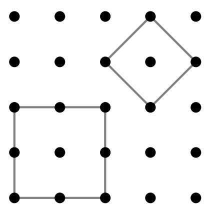
(c) È possibile posizionare le pedine in modo che non si sovrappongano mai?

Esercizio 28. Dimostrare che ogni poliedro convesso:

(a) ha almeno due facce con lo stesso numero di lati (fare un esempio di poliedro dove per ogni $n \geq 3$ le facce con n lati sono al più 2);

(b) le facce si possono colorare con solo due colori in modo che facce adiacenti abbiano colori diversi se e solo se il grado di ogni vertice è pari.

Esercizio 29. Determinare il numero di quadrati che hanno tutti i loro vertici in un reticolo $n \times n$:



Esercizio 30. Un dado viene lanciato 8 volte. Calcolare la probabilità per i seguenti eventi:
(a) il numero 6 è uscito almeno tre volte;
(b) la somma di tutti i valori usciti è minore o uguale a 24;
(c) i numeri tra 1 e 6 sono usciti tutti almeno una volta.

Esercizio 31. Consideriamo la matrice $n \times n$ ottenuta ponendo 5 sulla diagonale principale, 2 sulla diagonale immediatamente superiore e inferiore e 0 altrove:

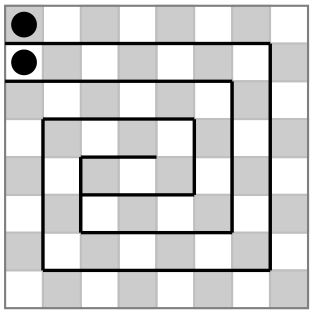
$$M_n = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 \end{bmatrix}$$

(a) Determinare una formula chiusa per il determinante di M_n.

(b) Per quali n la matrice M_n ha un autovalore uguale a 5?

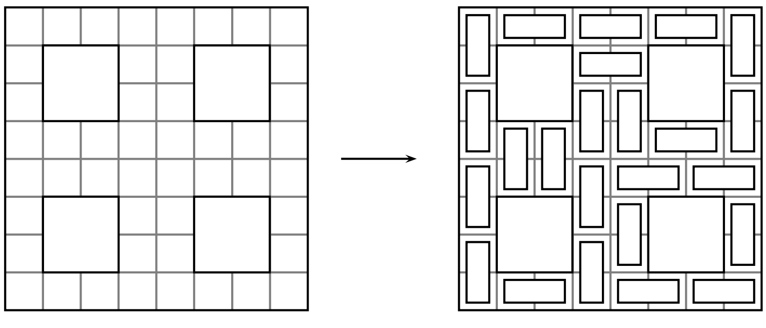
Esercizio 32. Provare che per ogni numero intero positivo n esiste un suo multiplo diverso da zero composto solo da cifre 0 o 9. Determinare esplicitamente il multiplo per $n = 2004$.

Esercizio 33. Due giocatori muovono a turno una delle due pedine lungo il percorso a spirale evidenziato sulla scacchiera.



Se la pedina da muovere sta su una casella nera allora può essere spostata in avanti di 1, 2, 3 o 4 caselle mentre se sta su una casella bianca può essere spostata solo di 1 o 2 caselle. Perde il giocatore che non può più muovere.
Il gioco è favorevole al primo o al secondo giocatore? Descrivere la strategia "vincente".

Esercizio 34. La seguente figura deve essere ricoperta con tessere rettangolari 2×1 o 1×2.



(a) Qual è il numero totale di ricoprimenti?
(b) Quanti sono i ricoprimenti diversi se la figura può essere ruotata?

Esercizio 35. Dimostrare che:

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n \, dx = n!$ per $n \geq 0$;

(b) $2!\,4!\,6! \cdots (2n)! > (n!)^n$ per $n \geq 1$;

(c) $\det(M_n) = (-1)^{n-1}(n-1)$ per $n \geq 2$ dove M_n è la matrice quadrata $n \times n$ con 0 sulla diagonale principale e 1 altrove.
