

**Esercizio 1.** Provare che per  $n \geq 1$ :

- (a) il numero  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$  è pari;
- (b) il numero  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^5$  non è mai divisibile per 5.
- 

**Esercizio 2.** Da un insieme di  $n$  elementi vengono scelti a caso due sottoinsiemi  $A$  e  $B$ .

- (a) Qual è la probabilità che  $A \subseteq B$  o  $A \supseteq B$ ?
- (b) Qual è la probabilità che  $A$  e  $B$  siano disgiunti?
- (c) Confrontare le due probabilità al variare di  $n$ .
- 

**Esercizio 3.** Partendo da un numero razionale positivo  $p/q$  due giocatori a turno possono:

- togliere 1 al numeratore se questo è maggiore di 1;
- togliere 1 al denominatore se questo è maggiore di 1;

Dopo ciascuna mossa la frazione viene ridotta ai minimi termini e vince chi riesce a ottenere 1.

Esempio: nella seguente partita, iniziando da  $15/11$ , riesce a vincere il 2° giocatore

$$\frac{15}{11} \xrightarrow{1^\circ \text{ gioc}} \frac{14}{11} \xrightarrow{2^\circ \text{ gioc}} \frac{14}{10} = \frac{7}{5} \xrightarrow{1^\circ \text{ gioc}} \frac{7}{4} \xrightarrow{2^\circ \text{ gioc}} \frac{7}{3} \xrightarrow{1^\circ \text{ gioc}} \frac{6}{3} = 2 \xrightarrow{2^\circ \text{ gioc}} 1$$

Supponendo che il numeratore e il denominatore della frazione iniziale siano la somma degli esiti di due dadi qual è la probabilità che il gioco sia favorevole al 1° giocatore?

---