Matematica Discreta

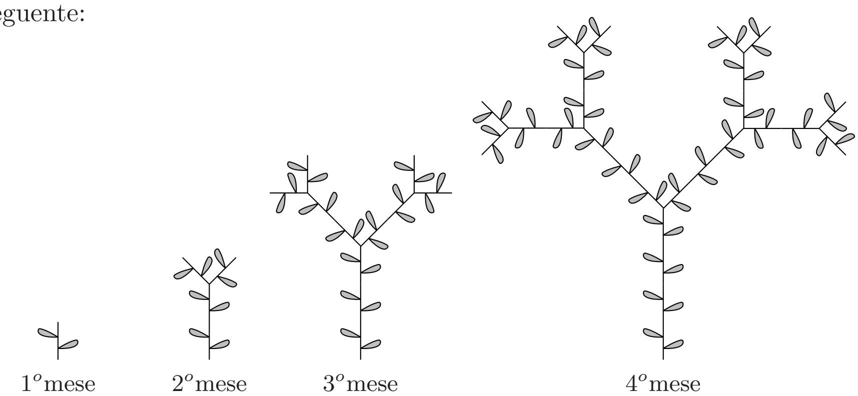
Esercizi della quarta settimana - Venerdì 2 aprile 2010

Esercizio 1. Provare che

(a) il numero $13 \cdot 19^{2n-3} + 3 \cdot 11^{n-1}$ è divisibile per 35 per ogni intero $n \geq 2$;

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$ per ogni intero $n \geq 1$.

Esercizio 2. L'andamento della crescita di un certo tipo di pianta può essere schematizzato nel modo seguente:



Quante foglie avrà la pianta dopo n mesi?

Esercizio 3. Dimostrare che per ogni intero $k \geq 0$ la funzione generatrice della successione

$$\left\{\binom{n+k}{k}\right\}_{n\geq 0} \qquad \text{è} \qquad f(z) = \frac{1}{(1-z)^{k+1}}.$$

Esercizio 4. Provare che per $n \geq 1$:

(a) il numero $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ è pari;

(b) il numero $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^5$ non è mai divisibile per 5.

Esercizio 5. La successione $\{a_n\}_{n\geq 0}$ ha la seguente proprietà: per $n \geq 2$ il termine a_n è la media aritmetica dei due termini precedenti. Dimostrare che esiste il limite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ e calcolarlo in funzione dei termini iniziali.

Esercizio 6. La successione $\{a_n\}_{n\geq 0}$ è definita nel seguente modo:

$$a_0 = \frac{1}{4}, \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad \text{e} \quad a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2} \quad \text{per ogni } n \geq 2.$$

Dimostrare che la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge e la sua somma è minore di 1.
