

Matematica Discreta

Esercizi della terza settimana - Venerdì 25 marzo 2010

Esercizio 1. Per un pagamento on-line un cliente deve inviare il numero x corrispondente alle ultime cifre del numero della sua carta di credito. Per la spedizione il cliente utilizza la codifica RSA con la chiave pubblica $(14803, 11)$ fornita dalla ditta presso la quale ha fatto l'acquisto. Il numero codificato è 5289, ossia

$$5289 = x^{11} \pmod{14803}.$$

Quanto vale x ?

Esercizio 2. Sia $N_d = \underbrace{144 \cdots 4}_{d \text{ volte}}$ per d intero positivo. Per quali valori di d il numero N_d è un quadrato perfetto?

Esercizio 3. Provare che per $n \geq 1$:

(a) il numero di Fibonacci F_{5n} è divisibile per 5;

(b) $\prod_{k=1}^n (n+k) = 2^n \cdot \prod_{k=1}^n (2k-1)$.

Esercizio 4. Una successione $a(n)$ soddisfa la seguente equazione ricorsiva per $n \geq 0$

$$a(n+2) = a(n+1) + 6a(n) + 10(-2)^n.$$

(a) Determinare una formula chiusa per $a(n)$ se $a(0) = 4$ e $a(1) = 5$.

(b) Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n+1)}{a(n)}$ al variare delle condizioni iniziali.

Esercizio 5. Determinare le formule chiuse per

$$f(n) = \sum_{A \subset \{1,2,\dots,n\}} |A|, \quad g(n) = \sum_{A \subset \{1,2,\dots,n\}} s(A) \quad \text{e} \quad h(n) = \sum_{A \subset \{1,2,\dots,n\}} p(A)$$

dove $|A|$ indica la cardinalità dell'insieme A , $s(A)$ indica la somma degli elementi di A e $p(A)$ indica il prodotto degli elementi di A (si assuma che $s(\emptyset) = p(\emptyset) = 0$).

Esercizio 6. In quanti modi è possibile ricoprire completamente senza sovrapposizioni la seguente figura con tessere rettangolari 2×1 o 1×2 ?

